Université Paris Dauphine Année 2008/2009
U.F.R. Mathématiques de la Décision
MD2 - Statistique

Feuille de Travaux Dirigés 1

Intégrales doubles et couples de variables aléatoires

Exercice 1 Calculer les intégrales $\int\int_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants :

a $f(x,y) = 1/(x+y+1)^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

b $f(x,y) = \sin(x+y)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$.

c $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

d $f(x,y) = 2^x 4^y$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

e $f(x,y) = \exp(-y)/(2\sqrt{x})$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0, x \leq y^2\}$.

f $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2+1}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1\}$
Utiliser le passage en coordonnées polaires.

g $f(x,y) = (x+y)^2 \exp\left(x^2 - y^2\right)$ et
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
Utiliser le changement de variable $u = x+y$ et $v = x-y$.

h $f(x,y) = y\exp(-xy)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. On demande ici de calculer l'intégrale de deux façons différentes (intégrer d'abord en x puis en y ; faire ensuite le contraire).

Exercice 2 Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left(y^2 - x^2 + 1\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour quelle valeur de k, f peut-elle représenter la densité d'un couple de variables aléatoires ?

Exercice 3 Soit $V = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires admettant pour densité

$$f_V(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} k & \text{si} \quad |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

1 Déterminer k ainsi que les lois marginales de X et de Y.

2 Déterminer $\text{cov}(X, Y)$ et étudier l'indépendance de X et Y.

Exercice 4 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi continue uniforme sur $[0, 1]$.

1 Calculer la densité de probabilité de $T = \inf(X, Y)$ et de $Z = \sup(X, Y)$.

2 Calculer l'espérance mathématique de Z et de T.

3 Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre Z et T.

Exercice 5 Soient X et Y deux variables aléatoires admettant pour densité de probabilité $f_{(X,Y)}(x,y) = \exp(-y)1_{[x,+\infty[}(y)1_{\mathbb{R}_+}(x)$.

1 Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité de probabilité.

2 Déterminer les lois maginales de X et de Y.

3 Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1 | Y > 2)$.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire admettant pour loi conditionnelle lorsque $Y = y$, la loi de densité : $y^2 x \exp(-yx)1_{\mathbb{R}_+}(x)$. La variable aléatoire Y admet pour densité $f_Y(y) = 1/y^2 1_{]1,+\infty[}(y)$. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$ ainsi que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 7 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. On considère les variables U et V définies par $U = X + Y$ et $V = X/Y$.

1 Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (U, V). Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

2 Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(V)$.