Université Paris Dauphine | Année 2008/2009
MD2 - Statistique | U.F.R. Mathématiques de la Décision

Feuille de Travaux Dirigés 2
Loi Normale - Loi Gamma - Loi Bêta

Exercice 1. Soit $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où ρ est un réel.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel ρ pour que Σ soit la matrice de variance-covariance d'un vecteur gaussien.
2. On suppose de plus que ce vecteur gaussien est centré. Donner l'expression analytique de sa densité de probabilité.

Exercice 2. Soit (X, Y) un vecteur gaussien de moyenne $(1, -1)$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Donner le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X - Y < 0)$.
4. Déterminer la valeur de α telle que $\mathbb{P}(|X + Y| \leq \alpha) \geq 0.9$.

Exercice 3. Soit (X, Y) deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X/Y$. Montrer que U suit une loi de Cauchy, i.e. une loi dont la densité de probabilité est de la forme $f(u) = \dfrac{1}{\pi\,(u^2 + 1)}$.

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que la loi marginale de X est une loi uniforme sur $[0, 1]$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une loi $\mathcal{N}\left(x, x^2\right)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$.
2. Montrer qure X et $1/Y$ sont indépendantes.

Exercice 5.

1. Soit (X, Y) un vecteur gaussien. Montrer que $X + Y$ est une variable aléatoire gaussienne dont on précisera les paramètres en fonction des caractéristique du vecteur aléatoire (X, Y).
2. Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ où μ est une vecteur de $\mathbb{R}^2$ et Σ une matrice carrée d'ordre 2 symétrique définie positive. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 inversible. on pose $Y = AX$. Montrer que Y est une vecteur gaussien dont on donnera la moyenne et la matrice de variance-covariance.

3. On suppose maintenant que X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   On pose $Y = \begin{cases} X & \text{si} \quad |X| \geq a \\ -X & \text{si} \quad |X| < a \end{cases}$.
   Montrer Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X+Y$ n'est pas gausienne. En déduire que le vecteur (X,Y) n'est pas gaussien.
4. Soit U une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et E une variable aléatoire indépendante de U de loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$. On pose $V = aU + E$ où a est un réel fixé. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(U|V)$.

Exercice 6.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\mathcal{G}(\alpha_1,\beta)$ et $\mathcal{G}(\alpha_2,\beta)$. On pose $S = X+Y$ et $T = X/(X+Y)$.
   (a) Montrer que S et T sont des variables indépendantes et préciser leurs lois respectives.
   (b) Déterminer la loi de X/Y et calculer son espérance si elle existe.
2. Montrer que la loi exponentielle de paramètre λ est un cas particulier de la loi Gamma. Considérons maintenant $X_1,\ldots,X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exercice 7.

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = X^2$. Déterminer la densité de probabilité de U et l'identifier comme la densité d'une loi Gamma dont on précisera les paramètres. En déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
2. Soit $X_1,\ldots,X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Donner sa densité de probabilité, son espérance et sa variance. Cette loi porte le nom de loi de chi-deux à n degrés de libertés. On la note $\chi^2(n)$.
3. Soient V et W deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\chi^2(n)$ et $\chi^2(m)$. Déterminer la loi de $V+W$.

Exercice 8. Soit $U_1,\ldots,U_n$ n variables indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $I_n = \min(U_1,\ldots,U_n)$ et $M_n = \max(U_1,\ldots,U_n)$.