TD3 bis

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } x \geq 0, y \geq 0, 4x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Peut-on choisir le réel k de telle sorte que f soit la densité d'un couple de v.a. ?

Exercice 2. Soient X, Y deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $]0,1]$.

a) Donner la densité de probabilité du couple (U,V) tel que $U = \log(X)$ et $V = -\log(Y)$.

b) Montrer que la v.a. $Z = \log(X/Y)$ admet une densité de probabilité f_Z définie par $f_Z(z) = \frac{1}{2}\exp(-|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité $f_{(X,Y)}$ donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}\mathbb{I}_{[1,+\infty[^2}(x,y)$$

On pose $U = XY$ et $V = X/Y$.

a) Calculer la loi du couple (U,V)

b) Calculer les lois conditionnelles de U sachant $V = v$ et de V sachant $U = u$

c) Calculer les espérances conditionnelles s'elles existent.

Exercice 4. Soit (X,Y) un vecteur gaussien de densité :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2xy\rho + y^2\right)$$

a) Montrer que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est ρ

b) Montrer que le coefficient de corrélation linéaire de X^2 et Y^2 est ρ^2

Exercice 5. Soit (X,Y) un vecteur gaussien de moyenne $(1,2)$ et matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\mathbb{P}(2X < Y)$ et $\mathbb{P}(|X| \leq Y)$.

b) Donner la densité de probabilité de (X, Y).

c) Montrer qu'il existent une v.a. gaussienne Z indépendante de X et un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que (X, Z) soit un vecteur gaussien et $Y = Z + \alpha X$.

d) Déterminer moyenne et variance de Z.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des v.a. telles que X_n est une Binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ avec $\lambda > 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la Poisson de parametre λ. Estimer la probabilité que $X_n \leq 2$ si $\lambda = 2$ et $n = 10000$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des v.a. telles que X_n est une v.a. de Poisson de moyenne n. Soit $Y_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$.

a) Montrer que on peut ecrire X_n comme somme de n v.a. independantes

b) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la gaussienne standard.

c) Utiliser le resultat precedent pour montrer que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{n!} = \frac{1}{2}$$

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite iid Bernoulli de parametre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \geq 1$ on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

a) Déterminer la loi de Y_n et calculer $\mathbb{E}[Y_n]$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$.

b) Soit $T_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$. Calculer $\mathbb{E}[T_n]$ et $\mathrm{Var}(T_n)$.

c) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la v.a. constante $2p$.

Exercice 9. Une compagnie d'assurance assure 500 navires pour une somme de 6 millions chacun. Chaque navire a chaque année une probabilité égale à 0.001 de subir un sinistre maeur couvert par l'assurance. Soit X le nomber de navires perdus en une année. Donner la loi de X, son espérance et sa variance. Auelles réserves doit posseder la compagnier d'assurance pour être sûre de pouvoir payer les indemnités avec une probabilité égale à 0.999 à la fin de chaque année ?

Une seconde compagnie d'assurance assure également 500 navires dans les mêmes conditions que la precedente. Les compagnies ont-elles intérêt à fusionner ?