

Feuille de Travaux Dirigés 4

Estimation ponctuelle

Exercice 1 On considère une variable aléatoire X dont la loi dépend de deux paramètres p_1 et p_2 de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p_1 - p_2, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p_1, \quad \mathbb{P}(X = 2) = p_2.$$

1. Indiquer les conditions que doivent vérifier p_1 et p_2 pour que le support de la loi probabilité précédente soit égal à $\{0, 1, 2\}$. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. comme X . Déterminer les estimateurs L_1 et L_2 de p_1 et p_2 par la méthode des moments. Montrer que ces estimateurs sont sans biais et convergents en probabilité.
3. Pour tout $j = 0, 1, 2$, on désigne par n_j le nombre de X_i égaux à j . Écrire la vraisemblance de l'échantillon en fonction de p_1, p_2, n_0, n_1 et n_2 . Déterminer les estimateurs Z_1 et Z_2 de p_1 et p_2 par la méthode du maximum de vraisemblance.
4. Montrer que $L_1 = Z_1$ et $L_2 = Z_2$.
5. Un échantillon de taille $n = 100$ de X a donné les observations suivantes $n_0 = 20, n_1 = 50$ et $n_2 = 30$. A quelles estimations de p_1 et p_2 conduisent les estimateurs L_1 et L_2 .

Exercice 2 On considère le modèle uniforme $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}([0, \theta]), \theta > 0\}$ et les estimateurs de θ suivantes $T_1 = 2\bar{X}_n$ et $T_2 = ((n+1)/n) \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Montrer qu'ils sont sans biais.
2. Montrer que T_2 est plus efficace que T_1 .

Exercice 3 Soit (X_1, \dots, X_n) un n -uplet de variables aléatoires i.i.d. tel que $X_k := \mu + U_k$, où U_k suit une loi uniforme sur $[-\nu, \nu]$.

1. On suppose ν connu et μ inconnu, déterminer un estimateur de μ par la méthode des moments,
2. On suppose ν et μ inconnus, montrer que $(\inf_{i \leq n} X_i, \sup_{i \leq n} X_i)$ est une statistique exhaustive.

Exercice 4 Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. comme X . Déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance dans les cas suivants :

1. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .
2. X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 .
3. X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Exercice 5 Soit X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. comme X de densité :

$$f_X(x) = (1 + \theta) x^\theta 1_{[0,1]}(x).$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de θ ? Trouver une statistique exhaustive pour le paramètre θ .
2. Déterminer l'estimateur Z_n de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 6 Le responsable d'une exposition s'intéresse au rythme d'arrivée des groupes de visiteurs à partir des observations faites au cours des premières journées. Il constate que le temps séparant l'arrivée de deux groupes successifs peut être assimilé à une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0, r]$ et que les temps inter-arrivées sont des variables aléatoires indépendantes. Pour l'organisation ultérieure des caisses réservées aux entrées des groupes, il souhaite estimer avec précision le paramètre θ , ayant à sa disposition un échantillon de taille n de ces variables inter-arrivées.

1. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
2. Déterminer l'estimateur L_n de r par la méthode des moments. Montrer que L_n est sans biais et convergent en probabilité.
3. Déterminer l'estimateur Z_n de r par la méthode du maximum de vraisemblance.
4. À partir de la statistique Z_n , proposer un estimateur W_n non biaisé de r .
5. Montrer que W_n est convergent en probabilité.
6. Comparer L_n et W_n .

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) et X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. comme X .

1. Déterminer une statistique exhaustive pour le paramètre λ .
2. Déterminer l'estimateur L_n de λ par la méthode des moments.
3. Déterminer l'estimateur Z_n de λ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 8 Soit (X_1, X_2) un échantillon de deux variables aléatoires i.i.d. admettant pour densité :

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} \mathbb{I}_{[0, \theta]}(x),$$

où θ est un paramètre strictement positif.

1. Montrez que les estimateurs de θ suivants sont sans biais :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{2}{3}(X_1 + X_2) \text{ et } \hat{\theta}_2 = \frac{7}{6} \max(X_1, X_2).$$

2. Calculez $R_i := \mathbb{E}[(\theta - \hat{\theta}_i)^2]$ pour $i = 1, 2$.
3. Entre $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$, quel estimateur choisiriez-vous? (justifiez votre choix).

Exercice 9 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un échantillon de la loi géométrique de paramètre θ strictement positif.

1. Calculez $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{E}[1/X_1]$.
2. Dédurre un estimateur convergent de θ .
3. Calculez l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ .
4. Cet estimateur est-il sans biais? (Considérez un échantillon de taille 1).

Exercice 10 Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de taille n de loi de Bernoulli de paramètre p . On considère l'estimateur $T_n = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$ pour le paramètre $\theta = p(1 - p)$. Ici $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrez que T_n est un estimateur qui converge en loi.
2. Montrez que T_n est biaisé. Proposez un estimateur sans biais de θ .