Université Paris Dauphine | Année 2008/2009
MD2 - Statistique | U.F.R. Mathématiques de la Décision

Feuille de Travaux Dirigés 6

Tests d'hypothèses

Exercice 1 Soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. i.i.d $\sim$ Bêta$(\theta, 1)$, $\theta > 0$. On souhaite tester

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{contre} \quad H_1 : \quad \theta = 2.$$

Utiliser le théorème de Neyman et Pearson pour trouver le test UPP de niveau α.

Exercice 2 Soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1 Montrer que le test UPP de niveau α pour

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \sigma = \sigma_1$$

où $\sigma_1 > \sigma_0$ est donné par

$$\begin{aligned} \phi(X_1, \ldots, X_n) &= 1 \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^{n} X_j^2 > c_\alpha \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

2 Déterminer c_α. Application numérique : $n = 10$, $\alpha = 1\%$.

Exercice 3 Le poids de paquets de poudre de lessive, à l'issue de l'empaquetage, est supposé suivre une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dont l'écart-type, égal à 5, représente la variabilité du poids due à l'imprécision de la machine. Le poids marqué sur les paquets est 710 gr. Toutes les heures, 10 paquets sont prélevés au hasard et pesés. On obtient, pour une heure donnée, $\bar{x}_{10} = 707$ gr.

Pour un niveau égal à 5%, tester l'hypothèse H_0 selon laquelle le poids d'un paquet est en moyenne supérieur à la spécification. L'hypothèse alternative H_1 est que le poids d'un paquet est en moyenne inférieur à celui annoncé sur les paquets. paquets de lessive.

Exercice 4 Pour construire un pont, une entreprise reçoit un lot de poutrelles métalliques dont le fabricant indique qu'elles peuvent résister jusqu'à une charge de 100 tonnes. Avant d'accepter le lot, l'entreprise prélève un échantillon de 16 poutrelles dont elle mesure la charge de rupture. On obtient les résultats suivants : 104.5, 104.3, 103.1, 93.5, 102.1, 101.1, 92.3, 98.5, 96.2,100.4, 98.2, 94.6, 101.7, 100.7, 95.1, 93.1. On admet que la charge de rupture suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\sigma = 4$.

Pour un risque de première espèce égal à 5%, tester l'hypothèse $H_0 : \mu = 100$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu < 100$.

Exercice 5 On considère une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X. On souhaite tester $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda = \lambda_1$ où $\lambda_0 < \lambda_1$.

1 Déterminer la région critique du test UPP de niveau α.

2 Application numérique : $n = 100$, $\lambda_0 = 0.2$, $\lambda_1 = 0.5$ et $\alpha = 0.05$.

Exercice 6 On considère une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X. On souhaite tester $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

1 Supposons $\sigma^2 = 1$, déterminer la région critique du test du rapport des vraisemblances de niveau α.

2 Supposons σ^2 inconnu, déterminer la région critique du test du rapport des vraisemblances de niveau α.

Exercice 7 On souhaite établir un contrôle de qualité à la réception d'un grand nombre de pièces de série. On désigne par p la proportion de pièces défectueuses dans la livraison et on envisage deux hypothèses extrêmes : $H_0 : p = 5\%$ et $H_1 : p = 8\%$. Si H_0 n'est pas rejetée, l'acheteur accepte le lot, sinon il le refuse. On décide d'examiner 400 pièces et de fixer une valeur critique égale à 6% telle que si la proportion de pièces défectueuses est supérieure à 6%, on refuse le lot.

Exercice 8 Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
1) Montrer que le modèle est régulier et calculer l'information de Fisher.
2) Calculer l'EMV $\hat{\lambda}_n$ de λ.
3) Calculer $E(\hat{\lambda}_n)$ et proposer un estimateur sans biais λ_n^* de λ
4) Montrer que l'estimateur λ_n^* est asymptotiquement efficace, c-à-d

$$\lim_{n \to +\infty} V(\lambda_n^*) I_n(\lambda) = 1.$$

Exercice 9 Soit $X_1, ..., X_n$ un échantillon i.i.d. d' espérance $\mu < +\infty$ et de variance $\sigma^2 < +\infty$
1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$S_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 - (\bar{X} - a)^2$$

2) En déduire que S_n^2 converge presque sûrement vers σ^2
3) Calculer $E(S_n^2)$ et proposer un estimateur S_{n-1}^2 sans biais de σ^2.

On suppose ici que l'échantillon suit un loi de poisson de paramètre λ.

4) Étudier la régularité du modèle et calculer l'information de Fisher.
5) Montrer que l'estimateur $\bar{X}$ est efficace.
6) En déduire que $V(\bar{X}) \leq V(S_{n-1}^2)$.