Correction du partiel

Exercice 1.
a. Pour que

$$f(x,y) = \begin{cases} C & \text{si} \max(|x|,|y|) \leq 2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

soit une de densité d'un couple de v.a. il faut et il suffit que $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$. Or

$$f(x,y) = C\mathbb{1}_{\{\max(|x|,|y|)\leq 2\}} = C\mathbb{1}_{[0,2]^2}(|x|,|y|) = C\mathbb{1}_{[-2,2]^2}(x,y) = C\mathbb{1}_{[-2,2]}(x)\mathbb{1}_{[-2,2]}(y).$$

D'ou (d'après Fubini)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = C\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{[-2,2]}(x)\mathbb{1}_{[-2,2]}(y)dxdy = C\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} dxdy = C(\int_{-2}^{2} dx)(\int_{-2}^{2} dy) = 16C$$

Finalement pour que f soit une fonction de densité il faut et il suffit que $C = \frac{1}{16}$.
b. On peut écrire

$$f(x,y) = \frac{1}{16}\mathbb{1}_{[-2,2]}(x)\mathbb{1}_{[-2,2]}(y) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-2,2]} \times \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-2,2]}(y) = f_1(x) \times f_2(y)$$

Donc la fonction f s'écrit sous forme de produit de deux fonction de densités. On peut en conclure donc que X et Y sont indépendantes et chacune de densité uniforme sur l'intervalle $[-2,2]$.
c. On pose $U = X + Y$. Comme les variables X et Y sont indépendantes, alors la fonction de densité de $X + Y$ est le produit de convolution de f_X et f_Y, c-à-d,

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(u-x)dx = \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-2,2]}(x)\mathbb{1}_{[-2,2]}(u-x)dx$$

Il est facile de vérifier que

$$\mathbb{1}_{[-2,2]}(x)\mathbb{1}_{[-2,2]}(u-x) = \mathbb{1}_{[-2,2]}(x)\mathbb{1}_{[-2+u,2+u]}(x)\mathbb{1}_{[-4,4]}(u)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-2,2]}(x)\mathbb{1}_{[-2+u,2+u]}(x)\mathbb{1}_{[-4,4]}(u)dx \\ &= \frac{1}{16}\mathbb{1}_{[-4,4]}(u)\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[\max(-2,-2+u),\min(2,2+u)]}(x)dx \\ &= \frac{1}{16}\mathbb{1}_{[-4,4]}(u)\int_{\max(-2,-2+u)}^{\min(2,2+u)} dx \\ &= \frac{1}{16}\mathbb{1}_{[-4,4]}(u) \times (\min(2,2+u) - \max(-2,-2+u)). \end{aligned}$$

Maintenant

– si $u \leq 0$ alors $2 \leq 2+u$ et $-2 \leq -2+u$ donc $\min(2, 2+u) = 2$ et $\max -2, -2+u = -2+u$ et donc $(\min(2, 2+u) - \max(-2, -2+u)) = 4-u$

– si $u \geq 0$ alors $2 \geq 2+u$ et $-2 \geq -2+u$ donc $\min(2, 2+u) = 2+u$ et $\max -2, -2+u = -2$ et donc $(\min(2, 2+u) - \max(-2, -2+u)) = 4+u$

Donc dans les deux cas $(\min(2, 2+u) - \max(-2, -2+u)) = 4 - |u|$. Finalement la densité de $U = X + Y$ est

$$f_U(u) = \frac{4-|u|}{16} \mathbb{1}_{[-4,4]}(u).$$

Exercice 2

a. Comme (X, Y) est un vecteur gaussien alors toutes combinaison linéaire de ces éléments est une variable normale, plus précisément, pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la variable $u^T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est normale. En particulier $Z = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ suit une loi normale. Or $E(Z) = E(Y - \alpha X) = E(Y) - \alpha E(X) = 0 - \alpha.0$ car le vecteur (X, Y) est centré c-à-d $E(X) = E(Y) = 0$.

D'après la matrice de variance-covariance de (X, Y), on a $V(X) = 1$, $V(Y) = 4$ et $Cov(X, Y) = 1$ on en déduit donc que $V(Z) = V(Y - \alpha X) = V(Y) + \alpha^2 V(X) - 2\alpha Cov(X, Y) = 4 + \alpha^2 - 2\alpha$. La variable Z suit donc une $\mathcal{N}(0, \alpha^2 + 4 - 2\alpha)$

b. On a

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

et comme la matrice A est inversible ($detA = 1 \neq 0$) alors le vecteur (X, Z) est un gaussien. Donc pour que X et Z soient indépendante il faut et il suffit que $Cov(X, Z) = 0$. Or

$$Cov(X, Z) = Cov(X, Y - \alpha X) = Cov(X, Y) - \alpha V(X) = 1 - \alpha$$

Donc X et Z sont indépendantes $\Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Donc X et Z sont indépendantes sssi $\alpha = 1$.

c. Le coefficient de correlation entre X et Y est par définition

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1}{2}.$$

d. Le coefficient de correlation entre X^2 et Y^2 est par définition

$$\rho_{X^2,Y^2} = \frac{cov(X^2, Y^2)}{\sqrt{V(X^2)V(Y^2)}}$$

Comme $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors $X^2 \rightsquigarrow \chi^2_{(1)}$ et donc on a $V(X^2) = 2$.

De même $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 4)$, donc $Y/2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$. D'ou $Y^2/4 \rightsquigarrow \chi^2_{(1)}$ par conséquent $V(Y^2/4) = 2$ et donc $V(Y^2) = 32$

Il nous reste à calculer $Cov(X^2, Y^2)$. D'après la question b.) X et $Y - X$ sont indépendante il en résulte qu'il en est de même pour X^2 et $(Y - X)^2$ D'ou

$$Cov(X^2, (Y - X)^2) = Cov(X^2, Y^2 - 2XY + X^2) = 0$$

D'ou

$$Cov(X^2, Y^2) - 2Cov(X^2, XY) + V(X^2) = 0$$

Ce qui implique que
$$Cov(X^2, Y^2) = 2Cov(X^2, XY) - V(X^2)$$
Or $Cov(X^2, XY) = E(X^3Y) - E(X^2)E(XY)$ et comme le vecteur (X, Y) est centré alors $E(XY) = Cov(X, Y) = 1$ et $E(X^2) = V(X) = 1$ donc $Cov(X^2, XY) = E(X^3Y) - 1$. D'autre part X^3 et $(Y - X)$ sont indépendantes donc
$$0 = Cov(X^3, (Y - X)) = Cov(X^3, Y) - Cov(X^3, X) = E(X^3Y) - E(X^4)$$
Il en résulte que $E(X^3Y) = E(X^4)$ et donc $Cov(X^3, XY) = E(X^4) - 1$.
Finalement on a
$$Cov(X^2, Y^2) = 2E(X^4) - 2 - V(X^2) = 2V(X^2) + 2E^2(X^2) - 2 - V(X^2) = V(X^2) = 2$$
et
$$\rho_{X^2,Y^2} = \frac{2}{\sqrt{2 \times 32}} = \frac{1}{4}$$
.

Exercice 3

a. On a $E(Y) = E(KX) = E(K)E(X) = 0$ car X et K sont indépendantes et $E(X) = 0$.
On a $V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = E(Y^2)$ car $E(Y) = 0$ donc $V(Y) = E(K^2)E(X^2)$ car K et X indép. et comme $\mathbb{P}(K = -1) = \mathbb{P}(K = 1) = 1/2$, alors $\mathbb{P}(K^2 = 1) = 1$ donc $E(K^2) = 1$. De plus $E(X^2) = V(X) = 1$ on a donc $V(Y) = 1$.
On a $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XKX) = E(K)E(X^2)$. Or $E(K) = -1.\mathbb{P}(K = -1) + 1.\mathbb{P}(K = 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ Donc $Cov(X, Y) = 0$.

b. Soit ϕ la fonction de repartition d'une variable normale centrée et réduite. On a
$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(KX \leq y) \\
&= \mathbb{P}(KX \leq y, K = -1) + \mathbb{P}(KX \leq y, K = 1) \quad \text{FPT} \\
&= \mathbb{P}(-X \leq y, K = -1) + \mathbb{P}(X \leq y, K = 1) \\
&= \mathbb{P}(-X \leq y)\mathbb{P}(K = -1) + \mathbb{P}(X \leq y)\mathbb{P}(K = 1) \quad \text{d'après l'indép de } X \text{ et } K \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \geq -y) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq y) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \phi(-y)) + \frac{1}{2}\phi(y) \\
&= \frac{1}{2}\phi(y) + \frac{1}{2}\phi(y) \quad \text{car } \phi(-y) = 1 - \phi(y) \\
&= \phi(y)
\end{aligned}$$
Donc Y suit une loi normale centrée et réduite.

c. Supposons que (X, Y) est gaussien alors $X - Y$ suit une loi normale et donc $\mathbb{P}(X - Y = 0) = \mathbb{P}(X(1 - K) = 0) = 0$. Or si $K = 1$ alors $X(1 - K) = 0$, donc $\{K = 1\} \subset \{X(1 - K) = 0\}$. Par conséquent,
$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(K = 1) \leq \mathbb{P}(X(1 - K) = 0)$$
ce qui contredit le fait que $X - Y$ soit une normale. Donc (X, Y) n'est pas gaussien.

Exercice 4

a. On a
$$\begin{aligned}
F_{X_n} &= \mathbb{P}(X_n \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X_n \geq x) \\
&= 1 - \mathbb{P}(U_1 \geq x, ...U_n \geq x) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(U_1 \geq x))^n \quad \text{car les } U_i \text{ sont i.i.d.} \\
&= 1 - (1 - F_U(x))^n
\end{aligned}$$

or

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } u \in [0,1] \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$$

Il en résulte que

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$f_{X_n}(x) = F'_{X_n}(x) = n(1-x)^{n-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

et que $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,n)$.

b. On déduit de a) que

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= \mathbb{P}(Y_n \le y) = \mathbb{P}(nX_n \le y) = \mathbb{P}(X_n \le y/n) = F_{X_n}(x/n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1-(1-\frac{x}{n})^n & \text{si } \frac{y}{n} \in [0,1] \\ 1 & \text{si } \frac{y}{n} > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-\frac{y}{n})^n & \text{si } y \in [0,n] \\ 1 & \text{si } y > n \end{cases} \end{aligned}$$

c. Calculons la limite de la fonction de répartition de Y_n.

– Si $y < 0$ alors $F_{Y_n}(y) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y) = 0$

– si $y \ge 0$ alors il existe n_0 à partir du quel $n > y$ et donc à partir de ce n_0 $F_{Y_n}(y) = 1-(1-y/n)^n$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y) = 1 - \lim_{n\to\infty}(1-y/n)^n = 1 - e^{-y}$$

Finalement

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = (1-e^{-y})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$$

et par conséquent Y_n converge en loi vers une $\mathcal{E}(1)$.

Exercice 5

a. On dit que X_m suit une loi de χ^2_m si

$$X_m = Y_1^2 + Y_2^2 +, ..., +Y_m^2$$

avec les Y_i sont i.i.d suivant une loi normale centrée et réduite. De plus la loi de $X_m \rightsquigarrow \mathcal{G}(m/2, 1/2)$.

b. $X_n \rightsquigarrow \mathcal{G}(n/2, 1/2)$ donc

$$E(X_n) = \frac{n/2}{1/2} = n$$

et

$$V(X_n) = \frac{n/2}{(1/2)^2} = 2n$$

c. Comme $X_n = Y_1^2 + Y_2^2 +, ..., +Y_n^2$ et comme les variable Y_i^2 sont i.i.d et $E(|Y_1^2|) = E(Y_1^2) = 1 < +\infty$, donc d'après la loi forte des grands nombres

$$\frac{1}{n} X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \overset{Ps}{\longmapsto} E(Y_1^2) = 1$$

d. Posons $\bar{Y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$. Comme $E(Y_1^2) = 1$ et $V(Y^2) = 2$ alors d'après le théorème central limite

$$\sqrt{n}(\bar{Y^2} - 1) \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} \mathcal{N}(0, 2)$$

Or

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}(\frac{X_n}{n} - 1) = \sqrt{n}(\bar{Y^2} - 1).$$

On conclut que

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} \mathcal{N}(0, 2).$$