Corrigé Contrôle continu 17/3/2009

Exercice 1. Soit (X,Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ admettant une densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} C & \text{si } |x|^2 + |y|^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer C.
2. Montrer que X, Y ne sont pas indépendantes.
3. Calculer $\mathbb{P}(X+Y \leq 0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X|Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y])^2|Y]$.
5. Soient (R,Θ) tels que $R \geq 0$, $\Theta \in [0, 2\pi)$ et $X = R\sin(\Theta)$, $Y = R\cos(\Theta)$. Montrer que R, Θ sont indépendantes et calculer leurs lois marginales.

Solution. $C = 1/\pi$ car $1 = C\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi C$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x|^2 + |y|^2 \leqslant 1\}$.
On calcule la densité marginale de X:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-|x|^2}}^{\sqrt{1-|x|^2}} \mathrm{d}y \, \mathbb{I}_{-1 \leqslant x \leqslant 1} = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-|x|^2}\, \mathbb{I}_{-1 \leqslant x \leqslant 1}.$$

On a aussi $f_Y = f_X$ et donc $f_X(x) f_Y(y) = 4\pi^{-2}\sqrt{1-|x|^2}\sqrt{1-|y|^2}\,\mathbb{I}_{-1 \leqslant x \leqslant 1}\mathbb{I}_{-1 \leqslant y \leqslant 1}$ qui est différent de $f_{(X,Y)}(x,y)$. Donc X, Y ne sont pas indépendantes.
Par symétrie on a que $(X,Y) \sim (X,-Y) \sim (-X,Y) \sim (-X,-Y)$. Donc $1 = \mathbb{P}(X+Y \leqslant 0) + \mathbb{P}(X+Y > 0) = \mathbb{P}(X+Y \leqslant 0) + \mathbb{P}((-X)+(-Y) < 0) = 2\mathbb{P}(X+Y \leqslant 0)$ qui donne $\mathbb{P}(X+Y \leqslant 0) = 1/2$. Par un calcul analogue on a $\mathbb{P}(X \geqslant 0, Y \geqslant 0) = 1/4$.
Pour calculer la variance conditionnelle il nous faut la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\mathbb{I}_{(x,y)\in D}}{2\sqrt{1-|y|^2}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=y}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{1-|y|^2}}^{\sqrt{1-|y|^2}} \frac{x\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-|y|^2}}\,\mathbb{I}_{-1 \leqslant y \leqslant 1} = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X|Y=y}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{1-|y|^2}}^{\sqrt{1-|y|^2}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-|y|^2}}\,\mathbb{I}_{-1 \leqslant y \leqslant 1} = \frac{(1-|y|^2)}{3}\mathbb{I}_{-1 \leqslant y \leqslant 1}$$

et donc

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \frac{(1-|Y|^2)}{3}.$$

Par la méthode de la fonction muette et par un changement de variables en cordonnées polaires on a que

$$\mathbb{E}[h(R,\Theta)] = \frac{1}{\pi}\int\int_D h(r,\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} h(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$f_{(R,\Theta)}(r,\theta) = 2r\mathbb{I}_{0 \leqslant r \leqslant 1}\frac{\mathbb{I}_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}}{2\pi}$$

qui montre que (R,Θ) sont indépendantes et qui donne

$$f_R(r) = 2r\mathbb{I}_{0 \leqslant r \leqslant 1} \qquad f_\Theta(\theta) = \frac{\mathbb{I}_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}}{2\pi}.$$

Exercice 2. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ tel que $X\sim\mathcal{N}(1,1)$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ est $\mathcal{N}(2x,4)$.

1. Calculer la moyenne et la matrice de covariance du couple (X,Y).
2. Donner la densité du couple (X,Y).
3. Calculer la fonction caractéristique du vecteur (X,Y).
4. Montrer que Y est gaussienne.
5. Montrer que (X,Y) est un vecteur gaussien.
6. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $Y=y$ est gaussienne. Donner la moyenne et la variance.

Solution. $\mathbb{E}[X]=1$, $\mathrm{Var}[X]=1$, $\mathbb{E}[X^2]=2$. $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]=\mathbb{E}[2X]=2$. $\mathbb{E}[Y^2]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y^2|X]]=\mathbb{E}[4X^2+4]=8+4=12$. $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X\,\mathbb{E}[Y|X]]=\mathbb{E}[2X^2]=4$. Donc si on appelle μ le vecteur de moyennes du couple (X,Y) et Σ sa matrice de covariance on a

$$\mu=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\qquad \Sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&8\end{pmatrix}.$$

La densité du couple est

$$f_{(X,Y)}(x,y)=f_{Y|X=x}(y)f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi 4}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-2x)^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

La fonction caractéristique de (X,Y) est

$$\phi_{(X,Y)}(t)=\mathbb{E}[e^{it_1X+it_2Y}]=\mathbb{E}[e^{it_1X}\mathbb{E}[e^{it_2Y}|X]]=\mathbb{E}[e^{it_1X}e^{it_22X-t_2^22}]=e^{i(t_1+2t_2)-(t_1+2t_2)^2/2-2t_2^2}$$
$$=e^{i(t_1+3t_2)-(t_1^2+4t_1t_2+8t_2^2)/2}$$

La fonction caractéristique de Y est donné par la formule précèdent:

$$\phi_Y(t)=\phi_{(X,Y)}((0,t))=e^{i2t-8t^2/2}$$

donc Y est une gaussienne de moyenne 2 et variance 8.
Pour montrer que le couple $(X,\,Y)$ est gaussien il suffit de contrôler que la densité est bien la densité d'une v.a. $\mathcal{N}_2(\mu,\,\Sigma)$ ou que la fonction caractéristique corresponds à la f.c. de la gaussienne $\mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$. Or, on a bien

$$\phi_{\mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)}(t)=e^{it^T\mu-t^T\Sigma t/2}=e^{it_1+i2t_2-(t_1^2+4t_1t_2+8t_2^2)/2}=\phi_{(X,Y)}(t).$$

La densité conditionnelle de X sachant $Y=y$ est

$$f_{X|Y=y}(x)=\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-2x)^2}{4}-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\frac{(y-2)^2}{8}}$$

mais

$$\frac{(y-2x)^2}{4}+(x-1)^2-\frac{(y-2)^2}{8}=\frac{y^2-4xy+4x^2+4x^2-8x+4}{4}-\frac{(y-2)^2}{8}$$
$$=\frac{8(x-(1+y/2)/2)^2+y^2+4-2(1+y/2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{8}$$
$$=\frac{8(x-(1+y/2)/2)^2+y^2/2+2-2y}{4}-\frac{(y-2)^2}{8}=2(x-(1+y/2)/2)^2$$

donc

$$f_{X|Y=y}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-(1+y/2)/2)^2}$$

qui est la densité d'une gaussienne de moyenne $(1+y/2)/2$ et variance $1/2$. Donc $X|Y=y\sim\mathcal{N}(1/2+y/4,1/2)$.

Exercice 3. Soit $(X,\, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien dans $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de covariance l'identité $\mathbb{I}_2$. Soit (Z, Q) le vecteur aléatoire défini par $Z = (X+Y)/2$ et $Q = (X-Y)/2$. On pose

$$U = \frac{1}{2}(X-Z)^2 + \frac{1}{2}(Y-Z)^2$$

1. Calculer la matrice de covariance du couple (Z, Q).
2. Z et Q sont-elles indépendantes?
3. Calculer $\mathbb{E}[U]$ et $\mathrm{Var}[U]$.
4. Montrer que Z et U sont indépendantes.
5. Donner la loi de U.

Solution. On a $\mathrm{Cov}(Z,\, Q) = 0$, $\mathrm{Var}(Z) = (\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y))/4 = 1/2$ et aussi $\mathrm{Var}(Q) = 1/2$. Donc la matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur (Z, Q) est donné par une transformation linéaire de (X, Y). Il est donc gaussien et etant $\mathrm{Cov}(Z, Q) = 0$ les v.a. Z, Q sont indépendantes.
On a que $X - Z = X - X/2 - Y/2 = X/Y - Y/2 = Q$ et $Y - Z = Y/2 - X/2 = -Q$, donc

$$U = \frac{1}{2}(X-Z)^2 + \frac{1}{2}(Y-Z)^2 = Q^2$$

Si on note $Q = G/\sqrt{2}$ alors $G \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$ et $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[G^2]/2 = 1/2$ et $\mathrm{Var}[U] = \mathrm{Var}(G^2/2) = \mathrm{Var}(G^2)/4 = 1/2$.
Etant U fonction de Q et Q indépendant de Z on a que Z, Q sont indépendantes.
La loi de U est donnée par la densité

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} u^{-1/2}\, e^{-u} \mathbb{I}_{u \geqslant 0}$$

qui est la densité d'une Gamma de paramètres 1/2 et 1.