Corrigé Partiel 7/4/2009

Sum-of-the-odds

Soit $N \geqslant 1$ et $X_1, \ldots, X_N$ des v.a. indépendantes telles que $X_j \sim \text{Bernoulli}(p_j)$ avec $p_j \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, N$. On observe les $\{X_j\}_{j=1,\ldots,N}$ une à la fois et on peut s'arrêter à tout moment. Si on s'arrêt à j on gagne si $X_j = 1$ et si $X_k = 0$ pour $j \leqslant k \leqslant N$ (c-à-d si X_j est la dernière v.a. à valoir 1). Soit $L = \sup\{k \in [1, N] : X_k = 1\}$ (on utilise la convention que $\sup \emptyset = +\infty$). La probabilité de gagner en s'arrêtant au temps d'arrêt T est donc $V(T) = \mathbb{P}(T = L) = \mathbb{P}(X_T = 1, X_{T+1} = 0, \ldots, X_N = 0)$. On veut maximiser la probabilité de victoire parmi tous les t.a. T bornés par N et associés à la filtration $\{\mathcal{F}_k\}_{k=1,\ldots,N}$ engendrée par les $\{X_k\}_{k=1,\ldots,N}$. On note $V_N = \sup_{T \leqslant N} V(T)$ le gain optimal pour le problème d'arrêt d'horizon N.

a) Donner la définition de temps d'arrêt. La v.a. L est-elle un temps d'arrêt?

b) Montrer que $Y_k = \mathbb{P}(L = k | \mathcal{F}_k) = \prod_{j=k+1}^{N} (1 - p_j) \mathbb{I}_{X_k = 1}$ pour $k = 1, \ldots, N$.

c) Montrer que l'on peut écrire la probabilité de victoire $V(T) = \mathbb{P}(L = T)$ en s'arrêtant au t.a. T comme $\mathbb{E}[Y_T]$.

d) Montrer par un calcul explicite que $\mathbb{E}[Z_N | \mathcal{F}_{N-1}]$ est une constante.

e) Montrer par induction que $\mathbb{E}[Z_{k+1} | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[Z_{k+1}]$ pour tout $k = 1, \ldots, N-1$.

f) Montrer que $\mathbb{E}[Z_k], k = 1, \ldots, N$ est une fonction décroissante de k.

g) Rappeler la définition de $T^\star$ et montrer qu'il est un temps d'arrêt pour $\mathcal{F}$.

h) Montrer qu'il existe un entier $r \in [1, N]$ tel que $T^\star = T_r$ où

$$T_r = \inf_N \{k \in [r, N] : X_k = 1\}$$

(Rappel: $\inf_N A = \inf A$ si $A \neq \emptyset$ et $\inf_N A = N$ si $A = \emptyset$).

i) Montrer que

$$G(r) = V(T_r) = \left[\prod_{k=r}^{N} (1 - p_k)\right] \sum_{k=r}^{N} \frac{p_k}{1 - p_k}.$$

et donc que la règle d'arrêt optimale est T_{r_*} où r_* est la valeur qui maximise $G(r)$.

j) Donner une expression pour $\mathbb{E}[Z_1]$.

k) Calculer $G(r) - G(r-1)$ pour $r = 2, \ldots, N$ et donner une condition explicite pour r_*.

l) Calculer $r_\star$ et $G(r_\star)$ pour $N = 10$ et $p_k = 0.2$ pour $k = 1, \ldots, 10$.

Corrigé

(a) Une v.a. $T : \Omega \to \mathbb{N}$ est un t.a. ssi $\{T \leqslant k\} \in \mathcal{F}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. L n'est pas un t.a. car pour déterminer si $L \leqslant k$ on a besoin de connaître le valeurs de X_j pour $j = k+1, \ldots, N$ et donc $\{L = k\} \notin \mathcal{F}_k$.

(b) On a $\mathbb{P}(L=k|\mathcal{F}_k)=\mathbb{P}(X_k=1,X_{k+1}=0,\ldots,X_N=0|X_1,\ldots,X_k)$. Par indépendance des $\{X_k\}_k$ cette expression devient $\mathbb{P}(X_k=1|X_1,\ldots,X_k)\mathbb{P}(X_{k+1}=0)\cdots\mathbb{P}(X_N=0)$ et donc

$$\mathbb{P}(L=k|\mathcal{F}_k)=\mathbb{I}_{X_k=1}(1-p_{k+1})\cdots(1-p_N)$$

pour tout $k=1,\ldots,N$.

(c) $\mathbb{P}(L=T)=\sum_{k=1}^N \mathbb{P}(L=k,T=k)=\sum_{k=1}^N \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{I}_{L=k}|\mathcal{F}_k]\mathbb{I}_{T=k}]=\sum_{k=1}^N (1-p_{k+1})\cdots(1-p_N)\mathbb{E}[\mathbb{I}_{X_k=1}\mathbb{I}_{T=k}]=\sum_{k=1}^N (1-p_{k+1})\cdots(1-p_N)\mathbb{E}[\mathbb{I}_{X_T=1}\mathbb{I}_{T=k}]=\sum_{k=1}^N \mathbb{E}[Y_T\,\mathbb{I}_{T=k}]=\mathbb{E}[Y_T]$ car T est un t.a.

(d) Par définition on a que $Z_N=Y_N\in\sigma(X_N)$ et donc $\mathbb{E}[Z_N|\mathcal{F}_{N-1}]=\mathbb{E}[Z_N]$ par indépendance de X_N par rapport à $\mathcal{F}_{N-1}$.

(e) On sait déjà que $Z_N\in\sigma(X_N)$, on veut montrer que $Z_k\in\sigma(X_k)$ pour tout $k=1,\ldots,N$. Faisons dont l'hypothèse de récurrence H_ℓ que $Z_k\in\sigma(X_k)$ pour tout $k=\ell,\ldots,N$. On a que H_N est vraie. Si on montre que $H_{\ell+1}\Rightarrow H_\ell$ alors par récurrence on aura que H_k est vraie pour tout $k=1,\ldots,N$ et donc que H_1 est vraie. Montrons donc que si $H_{\ell+1}$ est vraie alors $Z_\ell\in\sigma(X_\ell)$ (ce qu'implique que H_ℓ est vraie). Par définition on a que $Z_\ell=\sup(Y_\ell,\mathbb{E}[Z_{\ell+1}|\mathcal{F}_\ell])$. L'hypothèse $H_{\ell+1}$ implique que $Z_{\ell+1}\in\sigma(X_{\ell+1})$ et donc, par indépendance, que $\mathbb{E}[Z_{\ell+1}|\mathcal{F}_\ell]=\mathbb{E}[Z_{\ell+1}]$: une constante. Par conséquence $Z_\ell=\sup(Y_\ell,\mathbb{E}[Z_{\ell+1}])\in\sigma(X_\ell)$ car $Y_\ell\in\sigma(X_\ell)$. Donc $Z_k\in\sigma(X_k)$ pour tout $k=1,\ldots,N$ ce qu'implique que $\mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]=\mathbb{E}[Z_{k+1}]$.

(f) Le processus $(Z_k)_{k=1,\ldots,N}$ est une sur-martingale (par définition) et donc $Z_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]$. En prenant l'espérance des deux cotées on a $\mathbb{E}[Z_k]\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}]$ et donc $\mathbb{E}[Z_k]$ est une fonction décroissante de k.

(g) $T^\star=\inf\{k\in[1,N]:Y_k=Z_k\}=\inf_N\{k\in[1,N-1]:Y_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}$. L'evenement $\{T^\star\leqslant l\}$ est équivalent à dire qu'il existe $k\leqslant l$ tel que $Y_k=Z_k$. Les processus $(Y_k)_k$ et $(Z_k)_k$ sont adaptés, donc l'evenement $Y_k=Z_k$ appartient à $\mathcal{F}_k$ et cela implique que $\{\exists k\leqslant l: Y_k=Z_k\}=\cup_{k=1}^l\{Y_k=Z_k\}\in\mathcal{F}_l$. Donc $T^\star$ est un t.a.

(h) On peut écrire $T^\star=\inf_N\{k\in[1,N-1]:Y_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}=\inf_N\{k\in[1,N-1]:Y_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}]\}=\inf_N\{k\in[1,N-1]:X_k=1,q_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}]\}$ où $q_k=\prod_{j=k+1}^N(1-p_k)$. La fonction $k\mapsto q_k$ est croissante en k et la fonction $k\mapsto\mathbb{E}[Z_{k+1}]$ est décroissante en k. Soit $r\in[1,N-1]$ le premier instant k où $q_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}]$ si cet instant existe ou soit $r=N$ si $q_k<\mathbb{E}[Z_{k+1}]$ pour tout $k=1,\ldots,N-1$. Alors $T^\star=\inf_N\{k\in[1,N-1]:X_k=1,q_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}]\}=\inf_N\{k\in[r,N-1]:X_k=1\}=\inf_N\{k\in[r,N]:X_k=1\}$ car si $r\leqslant k\leqslant N-1$ on a par définition de r que $q_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}]$. Bien sûr, si $r=N$ alors $T^\star=N$.

(i) On calcul $G(r)=\mathbb{P}(L=T_r)$ pour $r=1,\ldots,N$:

$$\begin{aligned}G(r)=\mathbb{E}[Y_{T_r}]&=\sum_{k=r}^N\mathbb{E}[Y_k\,\mathbb{I}_{T_r=k}]=\sum_{k=r}^N(1-p_N)\cdots(1-p_{k+1})\mathbb{P}(X_k=1,X_{k-1}=0,\ldots,X_r=0)\\&=\sum_{k=r}^N(1-p_N)\cdots(1-p_{k+1})p_k(1-p_{k-1})\cdots(1-p_r)=\prod_{j=r}^N(1-p_j)\sum_{k=r}^N\frac{p_k}{1-p_k}\end{aligned}$$

(j) $\mathbb{E}[Z_1]=V_N=G(r_*)$ ou r_* est tel que $G(r_\star)\geqslant G(r)$ pour tout $r=1,\ldots,N$.

(k)

$$G(r)-G(r-1)=\prod_{j=r}^N(1-p_j)\left[\sum_{k=r}^N\frac{p_k}{1-p_k}-p_{r-1}-(1-p_{r-1})\sum_{k=r}^N\frac{p_k}{1-p_k}\right]$$

$$=p_{r-1}\prod_{j=r}^N(1-p_j)\left[\sum_{k=r}^N\frac{p_k}{1-p_k}-1\right]$$

donc $G(r) - G(r-1) \geqslant 0$ ssi $\sum_{k=r}^{N} \frac{p_k}{1-p_k} \geqslant 1$. Le maximum est donc atteint pour le dernier valeur de $r = 2, \ldots, N$ tel que $\sum_{k=r}^{N} \frac{p_k}{1-p_k} \geqslant 1$ où à 1 si $\sum_{k=2}^{N} \frac{p_k}{1-p_k} < 1$.

$$r_\star = \sup \left(\{1\} \cup \left\{ r \in [2, N] \colon \sum_{k=r}^{N} \frac{p_k}{1-p_k} \geqslant 1 \right\} \right)$$

(l) Si $p_k = 0.2$ alors

$$\sum_{k=r}^{N} \frac{p_k}{1-p_k} = \frac{1}{4}(N - r + 1)$$

qui est $\geqslant 1$ ssi $N - r + 1 \geqslant 4$. Avec $N = 10$ ça donne $r \leqslant 7$ et donc $r_\star = 7$ et

$$G(r_\star) = 0.8^4 = 0.4096.$$