[Corrigé exercices 44,46,48 du TD d'Evaluation Actifs 2008/2009]

**Ex. 44. Option sur moyenne**

$$S_t = e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma B_t} = e^{(r+\sigma^2/2)t+\sigma \bar{B}_t}$$

où $\bar{B}_t = B_t - \sigma t$.

$$Z_T = \exp(T^{-1}\int_0^T \log(S_t)\mathrm{d}t)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \log(S_t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T [(r+\sigma^2/2)t + \sigma\bar{B}_t]\mathrm{d}t = (r+\sigma^2/2)\frac{T}{2} + \sigma\frac{1}{T}\int_0^T \bar{B}_t\mathrm{d}t$$

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(Z_T - S_T)_+] = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_T(\frac{Z_T}{S_T}-1)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\frac{Z_T}{S_T}-1)_+]$$

où

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-rT}S_T = e^{-rT}e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma B_T} = e^{-\sigma^2 T/2+\sigma B_T}$$

$$\log\frac{Z_T}{S_T} = -(r+\sigma^2/2)\frac{T}{2} + \sigma\frac{1}{T}\int_0^T (\bar{B}_t - \bar{B}_T)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^T (\bar{B}_t - \bar{B}_T)\mathrm{d}t = -\int_0^T (\int_t^T d\bar{B}_s)\mathrm{d}t = -\int_0^T (\int_0^s \mathrm{d}t)d\bar{B}_s = -\int_0^T s\,d\bar{B}_s$$

donc

$$\log\frac{Z_T}{S_T} = -(r+\sigma^2/2)\frac{T}{2} - \sigma\frac{1}{T}\int_0^T s\,d\bar{B}_s$$

on pose $\alpha = -(r+\sigma^2/2)\frac{1}{2}$ et $\beta(t) = \sigma s/T$ et on a $\log\frac{Z_T}{S_T} = \alpha T - \int_0^T \beta(s)\mathrm{d}\bar{B}_s$. Sous la proba $\mathbb{Q}$ le processus $\bar{B}$ est un mvt. Brownien. Donc la v.a. $\log\frac{Z_T}{S_T}$ a la même loi que

$$\alpha T - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\bar{B}_T$$

car

$$\alpha T - \int_0^T \beta(s)\mathrm{d}\bar{B}_s \sim \mathcal{N}(\alpha T, \int_0^T \beta(s)^2\mathrm{d}s)$$

et $\int_0^T \beta(s)^2\mathrm{d}s = (\sigma^2/T^2)\int_0^T s^2\mathrm{d}s = \sigma^2 T/3$. On obtient

$$C = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(e^{\alpha T - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\bar{B}_T} - 1)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(e^{(\alpha+\sigma^2/6)T - \sigma^2 T/6 - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\bar{B}_T} - 1)_+]$$

$$= K^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\tilde{S}_T - K)_+]$$

où $K = e^{-(\alpha+\sigma^2/6)T}$ et $\tilde{S}_T = e^{-\sigma^2 T/6 - \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\bar{B}_T}$ est une martingale exponentielle sous $\mathbb{Q}$ qui obéit la dynamique

$$d\tilde{S}_t = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}\tilde{S}_t\,d\bar{B}_t$$

**Ex. 46. Options asiatiques**

$\mathrm{d}S_t = S_t(r\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t)$

$M_t = \mathbb{E}[(T^{-1} \int_0^T S_r \mathrm{d}r - K)_+|\mathcal{F}_t]$ est une martingale, car $M_t = \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_t]$ avec $M_T = (T^{-1}\int_0^T S_r \mathrm{d}r - K)_+$.

On pose $Q_t = S_t^{-1}(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_r \mathrm{d}r)$. Alors

$$M_t = \mathbb{E}[(\frac{1}{T}\int_t^T S_r \mathrm{d}r + \frac{1}{T}\int_0^t S_r \mathrm{d}r - K)_+|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[S_t(\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\mathrm{d}r - Q_t)_+|\mathcal{F}_t]$$

et $S_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

La v.a. $S_r/S_t$ avec $r > t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ car $S_r/S_t = \exp((r - \sigma^2/2)(r-t) + \sigma(B_r - B_t))$ et par les propriétés des espérances conditionnelles on a que $M_t = S_t u(t, Q_t)$ où

$$u(t,x) = \mathbb{E}[(\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\mathrm{d}r - x)_+|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[(\frac{1}{T}\int_t^T \frac{S_r}{S_t}\mathrm{d}r - x)_+]$$

Pour écrire la formule d'Itô pour $M_t$ on calcule d'abord la décomposition de $Q_t$:

$$\mathrm{d}Q_t = -\frac{\mathrm{d}t}{T} + (K - \frac{1}{T}\int_0^T S_r \mathrm{d}r)\mathrm{d}S_t^{-1} = -\frac{\mathrm{d}t}{T} + (K - \frac{1}{T}\int_0^T S_r \mathrm{d}r)[-\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t^2} + \frac{\mathrm{d}\langle S\rangle_t}{S_t^3}]$$

$$= -\frac{\mathrm{d}t}{T} + (K - \frac{1}{T}\int_0^T S_r \mathrm{d}r)[-\frac{(r\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t)}{S_t} + \frac{\sigma^2 \mathrm{d}t}{S_t}] = -\frac{\mathrm{d}t}{T} - Q_t((r - \sigma^2)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t)$$

car $\mathrm{d}\langle S\rangle_t = \sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}t$. Cette décomposition donne:

$$\mathrm{d}\langle Q\rangle_t = Q_t^2 \sigma^2 \mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}\langle S, Q\rangle_t = -Q_t S_t \sigma^2 \mathrm{d}t.$$

Maintenant la formule d'Itô pour $M_t$:

$$\mathrm{d}M_t = \mathrm{d}[S_t u(t, Q_t)] = u(t, Q_t)\mathrm{d}S_t + S_t \nabla u(t, Q_t)\mathrm{d}Q_t + \frac{1}{2}S_t \Delta u(t, Q_t) d\langle Q\rangle_t$$

$$+ \nabla u(t, Q_t)\mathrm{d}\langle S, Q\rangle_t + S_t \frac{\partial}{\partial t}u(t, Q_t)\mathrm{d}t$$

$$= u(t, Q_t)S_t(r\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t) + S_t \nabla u(t, Q_t)[-\frac{\mathrm{d}t}{T} - Q_t((r - \sigma^2)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t)]$$

$$+ \frac{1}{2}S_t \Delta u(t, Q_t)Q_t^2 \sigma^2 \mathrm{d}t - \nabla u(t, Q_t)Q_t S_t \sigma^2 \mathrm{d}t + S_t \frac{\partial}{\partial t}u(t, Q_t)\mathrm{d}t$$

$$= u(t, Q_t)S_t \sigma \mathrm{d}W_t - S_t \nabla u(t, Q_t)Q_t \sigma \mathrm{d}W_t$$

$$+ S_t\{r u(t, Q_t) - \nabla u(t, Q_t)[\frac{1}{T} + Q_t r] + \frac{1}{2}Q_t^2 \sigma^2 \Delta u(t, Q_t) + \frac{\partial}{\partial t}u(t, Q_t)\}\mathrm{d}t$$

La composante à variation borné doit être nulle (car $M_t$ est martingale) ce qui donne l'EDP

$$r u(t, q) - \nabla u(t, q)[\frac{1}{T} + q r] + \frac{1}{2}q^2 \sigma^2 \Delta u(t, q) + \frac{\partial}{\partial t}u(t, q) = 0$$

satisfaite par $u(t, q)$. La condition limite est

$$u(T, q) = \mathbb{E}[(\frac{1}{T}\int_T^T \frac{S_r}{S_t}\mathrm{d}r - q)_+] = 0.$$

**Ex. 48. Option Barrière**

1) On note $\mathrm{DIC}_t(x, K, H)$ et $\mathrm{DOC}_t(x, K, H)$ les prix des options (de maturité $T$) à l'instant $t \leqslant T$. Si on achète a $t = 0$ un option DIC et un option DOC de mêmes paramètres $K, H$ à maturité on recevoir le payoff

$$\mathbb{I}_{\tau_H \leqslant T}(S_T - K)_+ + \mathbb{I}_{\tau_H > T}(S_T - K)_+ = (S_T - K)_+$$

qui est le payoff de la call de strike K, donc la valeur à l'instant 0 de notre portefeuille est donnée par la valeur de la call :

$$\mathrm{DIC}(x, K, H) + \mathrm{DOC}(x, K, H) = \mathrm{Call}(0, x, K).$$

2) On appelle  le payoff de la DOC. Alors

$$H = \mathbb{I}_{\tau_H > T}(S_T - K)_+ = \mathbb{I}_{\tau_H > T}(S_{T \wedge \tau_H} - K)_+ = V_T = v(T \wedge \tau_H, S_{T \wedge \tau_H})$$

où la fonction $v(t, x)$ satisfait les conditions limites $v(T, x) = (x - K)_+$ pour $x > H$ et $v(t, H) = 0$ pour $t \leqslant T$. La formule d'Itô donne

$$\mathrm{d}[e^{-rt}v(t, S_t)] = -\,\mathrm{r}e^{-rt}v(t, S_t)\mathrm{d}t + e^{-rt}\nabla v(t, S_t)\sigma S_t \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}e^{-rt}\Delta v(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}t$$

$$+ e^{-rt}\frac{\partial}{\partial t}v(t, S_t)\mathrm{d}t + e^{-rt}\nabla v(t, S_t) r S_t \mathrm{d}t$$

Ou $B$ est un Brownien sous la proba risque-neutre $\mathbb{Q}$ et la dynamique de $S$ est

$$\mathrm{d}S_t = S_t(r\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t) \qquad \mathrm{d}\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t \mathrm{d}B_t.$$

Soit $\tau' = \tau_H \wedge T$. Si on applique cette formule au processus arrête $v(\tau, S_\tau)$ on obtient

$$e^{-r\tau}v(\tau, S_\tau) = v(0, S_0) + \int_0^\tau \sigma \nabla v(t, S_t) d\tilde{S}_t + \int_0^\tau (\cdots)\mathrm{d}t$$

Par la propriété martingale sous la proba risque neutre on doit imposer que la partie à variation borné soit nulle, donc, pour tout $x > H$:

$$-\,r\,v(t, x) + \frac{1}{2}\Delta v(t, x)\sigma^2 x_t^2 + \frac{\partial}{\partial t}v(t, x) + r x \nabla v(t, x) r = 0$$

avec les condition limites énoncé plus en haut. Dans ce cas

$$e^{-r\tau}v(\tau, S_\tau) = v(0, S_0) + \int_0^\tau \nabla v(t, S_t) d\tilde{S}_t$$

et en prenant l'espérance on obtient le prix de l'option DOC:

$$v(0, S_0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau}v(\tau, S_\tau)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau}v(\tau, S_\tau)\mathbb{I}_{\tau_H \leqslant T}] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau}v(\tau, S_\tau)\mathbb{I}_{\tau_H > T}]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_H}v(\tau_H, H)\mathbb{I}_{\tau_H \leqslant T}] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}v(T, S_T)\mathbb{I}_{\tau_H > T}]$$

car $S_{\tau_H} = H$ par la continuité de $S$. Les condition limites de $v$ donnent

$$v(0, S_0) = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)_+ \mathbb{I}_{\tau_H > T}]$$

La couverture de l'option est donc réalisée par le portefeuille $(H^0, H_t)$ donné par $H^0 = v(0, S_0)$ et $H_t = \nabla v(t, S_t) \mathbb{I}_{t \leqslant \tau}$.

4) Par la relation trouvé précédemment:

$$\begin{aligned}
\mathrm{DIC} = \mathrm{Call} - \mathrm{DOC} &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)_+] - e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)_+ \mathbb{I}_{\tau_H > T}] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)_+ \mathbb{I}_{\tau_H \leqslant T}].
\end{aligned}$$