[Corrigé exercices 50,51,52 du TD d'Evaluation Actifs 2008/2009]

Ex. 50. Modèle de Vasiček

Dynamique:

$$\mathrm{d}r_t = (a - b\, r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t$$

1)

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}[e^{bt} r_t] = b\, X_t\, \mathrm{d}t + e^{bt}\mathrm{d}r_t = b\, X_t\, \mathrm{d}t + e^{bt}(a - b\, r_t)\mathrm{d}t + e^{bt}\sigma \mathrm{d}B_t = a\, e^{bt}\mathrm{d}t + e^{bt}\sigma \mathrm{d}B_t$$

2) L'équation pour X est une équation à coefficients qui ne dépendent pas de X donc

$$X_t = X_0 + \int_0^t a\, e^{bs}\mathrm{d}s + \int_0^t e^{bs}\sigma \mathrm{d}B_s$$

ou

$$r_t = r^{-bt} r_0 + a\int_0^t e^{-b(t-s)}\mathrm{d}s + \sigma\int_0^t e^{-b(t-s)}\mathrm{d}B_s$$

3) L'intégrale stochastique est une intégrale de Wiener qui à une loi Gaussienne à moyenne nulle. On calcul

$$\mathbb{E}[r_t] = r^{-bt} r_0 + a\int_0^t e^{-b(t-s)}\mathrm{d}s = r^{-bt} r_0 + a\frac{1 - e^{-bt}}{b}$$

$$\mathrm{Var}(r_t) = \mathbb{E}[(\sigma\int_0^t e^{-b(t-s)}\mathrm{d}B_s)^2] = \sigma^2\int_0^t e^{-2b(t-s)}\mathrm{d}s = \sigma^2\frac{1 - e^{-2bt}}{2\, b}$$

ce qui donne

$$r_t \sim \mathcal{N}(r^{-bt} r_0 + a\frac{1 - e^{-bt}}{b}, \sigma^2\frac{1 - e^{-2bt}}{2\, b}).$$

4) Le payoff du zéro-coupon est la v.a. constante 1.

5) $P(t, T)$ est le prix à l'instant t du zéro-coupon de maturité T. Le prix actualisé est

$$\tilde{P}(t, T) = e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} P(t, T)$$

Au temps T on a $P(T, T) = 1$ et donc $\tilde{P}(T, T) = e^{-\int_0^T r_s \mathrm{d}s}$. Par AOA le prix actualisé doit être martingale sous $\mathbb{Q}$ donc $\tilde{P}(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{P}(T, T)|\mathcal{F}_t]$ et si on revenons à la version non-actualisé on obtient

$$P(t, T) = e^{\int_0^t r_s \mathrm{d}s}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r_s \mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t].$$

6) La v.a. $\int_t^T r_s \mathrm{d}s$ est Gaussienne et donc

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t] = e^{-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_t^T r_s \mathrm{d}s|\mathcal{F}_t] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}(\int_t^T r_s \mathrm{d}s|\mathcal{F}_t)}$$

où

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_t^T r_s \mathrm{d}s|\mathcal{F}_t] = \int_t^T \left(r^{-bs} r_0 + a\int_0^s e^{-b(s-u)}\mathrm{d}s + \sigma\int_0^t e^{-b(s-u)}\mathrm{d}B_u\right)\mathrm{d}s = \cdots$$

et

$$\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}\Big(\int_t^T r_s \mathrm{d}s|\mathcal{F}_t\Big) = \sigma^2\,\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T\int_0^s e^{-b(s-u)}\mathrm{d}B_u\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

$$= \sigma^2\,\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T\int_u^T e^{-b(s-u)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}B_u\middle|\mathcal{F}_t\right) = \cdots$$

Ex. 51. Stratégies autofinancées de zéro-coupons

1) On peut montrer que le prix $B(t,T)$ du zéro-coupon de maturité T suive la dynamique

$$\mathrm{d}B(t,T) = r_t B(t,T)\mathrm{d}t - \sigma_f^*(t,T)B(t,T)\mathrm{d}W_t, \qquad B(T,T)=1.$$

Par Itô on a

$$\mathrm{d}\left(B(t,T)^{-1}\right) = -\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)^2} + \frac{\mathrm{d}\langle B(\cdot,T)\rangle_t}{B(t,T)^3} = -\frac{r_t B(t,T)\mathrm{d}t - \sigma_f^*(t,T)B(t,T)\mathrm{d}W_t}{B(t,T)^2} + \frac{\sigma_f^*(t,T)^2}{B(t,T)}\mathrm{d}t$$

car $\mathrm{d}\langle B(\cdot,T)\rangle_t = \sigma_f^*(t,T)B(t,T)\mathrm{d}t$. On a aussi

$$\mathrm{d}\Big[\frac{B(t,T)}{B(t,T^O)}\Big] = \frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T^O)} + B(t,T)\mathrm{d}\Big[\frac{1}{B(t,T^O)}\Big] + \mathrm{d}\langle B(\cdot,T),\frac{1}{B(\cdot,T^O)}\rangle_t$$

$$= \frac{r_t B(t,T)\mathrm{d}t - \sigma_f^*(t,T)B(t,T)\mathrm{d}W_t}{B(t,T^O)}$$

$$+ B(t,T)\left(-\frac{r_t\mathrm{d}t - \sigma_f^*(t,T^O)\mathrm{d}W_t}{B(t,T^O)} + \frac{\sigma_f^*(t,T^O)^2}{B(t,T^O)}\mathrm{d}t\right)$$

$$-\sigma_f^*(t,T)B(t,T)\frac{\sigma_f^*(t,T^O)}{B(t,T^O)}\mathrm{d}t$$

$$= B^F(t,T)[-\sigma_f^*(t,T)\mathrm{d}W_t + \sigma_f^*(t,T^O)\mathrm{d}W_t + \sigma_f^*(t,T^O)^2\mathrm{d}t - \sigma_f^*(t,T)\sigma_f^*(t,T^O)\mathrm{d}t]$$

2)

$$\mathrm{d}V_t^F = \mathrm{d}\Big[\frac{V_t}{B(t,T^O)}\Big] = \frac{\mathrm{d}V_t}{B(t,T^O)} + V_t\mathrm{d}\Big[\frac{1}{B(t,T^O)}\Big] + \mathrm{d}\langle V,\frac{1}{B(\cdot,T^O)}\rangle_t$$

$$= \frac{H_t^O\mathrm{d}B(t,T^O) + H_t\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T^O)} + V_t\mathrm{d}\Big[\frac{1}{B(t,T^O)}\Big]$$

$$+ H_t^O\mathrm{d}\langle B(\cdot,T^O),\frac{1}{B(t,T^O)}\rangle_t + H_t\mathrm{d}\langle B(\cdot,T),\frac{1}{B(t,T^O)}\rangle_t$$

$$= H_t^O\underbrace{\mathrm{d}\Big[\frac{B(t,T^O)}{B(t,T^O)}\Big]}_{=0} + \frac{H_t\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T^O)} + H_tB(t,T)\mathrm{d}\Big[\frac{1}{B(t,T^O)}\Big] + H_t\mathrm{d}\langle B(\cdot,T),\frac{1}{B(t,T^O)}\rangle_t$$

$$= \frac{H_t\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T^O)} + H_tB(t,T)\mathrm{d}\Big[\frac{1}{B(t,T^O)}\Big] + H_t\mathrm{d}\langle B(\cdot,T),\frac{1}{B(t,T^O)}\rangle_t = H_t\mathrm{d}\Big[\frac{B(t,T)}{B(t,T^O)}\Big] = H_t\mathrm{d}B^F(t,T)$$

Ex. 52. Stratégie de couverture d'options sur zéro-coupons

1) Soit $R(t)=\exp(-\int_0^t r_s \mathrm{d}s)$. Le processus $X_t=B(t,T^O)R(t)$ est solution de

$$\mathrm{d}X_t=\mathrm{d}[B(t,T^O)R(t)]=r_tR(t)B(t,T^O)\mathrm{d}t-\sigma_f^*(t,T^O)R(t)B(t,T^O)\mathrm{d}W_t-r_tR(t)B(t,T^O)\mathrm{d}t$$

$$=-\sigma_f^*(t,T^O)R(t)B(t,T^O)\mathrm{d}W_t=-\sigma_f^*(t,T^O)X_t\mathrm{d}W_t$$

avec condition initiale $X_0=B(0,T^O)$.

Le processus $Y_t=B(0,T^O)\exp(-\int_0^t \sigma_f^*(s,T^O)\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_f^*(s,T^O)\mathrm{d}s)$ est une martingale exponentielle, solution de l'équation

$$\mathrm{d}Y_t=-\sigma_f^*(t,T^O)Y_t\mathrm{d}W_t$$

avec condition initiale $Y_0=B(0,T^O)$. Les deux processus sont solution de la même équation linéaire avec la même condition initiale qui admet une unique solution. Donc $X_t=Y_t$.

2)

$$L_t=\frac{X_t}{X_0}=\frac{Y_t}{Y_0}=\exp(-\int_0^t \sigma_f^*(s,T^O)\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_f^*(s,T^O)\mathrm{d}s)$$

qui est une martingale exponentielle.

3) Par la formule de Bayes

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^F}[B^F(t,T)|\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^F}[\frac{B(t,T)}{B(t,T^O)}|\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\frac{B(t,T)}{B(t,T^O)}L_{T^O}|\mathcal{F}_s]L_s^{-1}$$

$$=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\frac{B(t,T)}{B(t,T^O)}L_t|\mathcal{F}_s]L_s^{-1}=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\frac{B(t,T)}{B(0,T^O)}R(t)|\mathcal{F}_s]\frac{B(0,T^O)}{B(s,T^O)R(s)}$$

$$=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\frac{B(s,T)}{B(0,T^O)}R(s)|\mathcal{F}_s]\frac{B(0,T^O)}{B(s,T^O)}=\frac{B(s,T)}{B(s,T^O)}=B^F(s,T)$$

car $R(t)B(t,T)$ est aussi proportionnel à une martingale exponentielle. Donc $B^F(t,T)$ est une martingale et $V_t^F=V_0^F+\int_0^t H_s\mathrm{d}B^F(s,T)$ est un intégrale stochastique par rapport à une martingale qui est donc martingale (les hypothèses sur H_s garantissent l'integrabilité nécessaire).

4) Ici note $X_t=B^F(t,T)$. La dynamique de X_t est

$$\mathrm{d}X_t=a_t X_t\mathrm{d}t+b_t X_t\mathrm{d}W_t$$

où $a_t=\sigma_f^*(t,T^O)(\sigma_f^*(t,T^O)-\sigma_f^*(t,T))$ et $b_t=\sigma_f^*(t,T^O)-\sigma_f^*(t,T)$. Ici W est un Brownien sous la proba originaire $\mathbb{P}$. (Attention, ce n'est pas un Brownien sous la proba $\mathbb{P}^F$). Par Girsanov le processus W est solution de

$$\mathrm{d}W_t=-\sigma_f^*(t,T^O)\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_t^F$$

où W^Fest un Brownien sous $\mathbb{P}^F$ donc

$$\mathrm{d}X_t=a_t X_t\mathrm{d}t-b_t\sigma_f^*(t,T^O)\mathrm{d}t+b_t X_t\mathrm{d}W_t^F=b_t X_t\mathrm{d}W_t^F$$

Le processus V_t^F est une martingale sous $\mathbb{P}^F$, donc $\mathbb{E}^F[V_{T^O}^F|\mathcal{F}_t]=V_t^F$ pour tout $t\leqslant T^O$. On a que $V_{T^O}^F=\phi(B^F(T^O,T))=\phi(B(T^O,T))$. En utilisant la formule de Itô on a

$$\mathrm{d}\pi_{\sigma_f}(t,B^F(t,T))=\nabla\pi_{\sigma_f}(t,B^F(t,T))\mathrm{d}B^F(t,T)=$$

la partie en dt est nulle car on suppose que π_{σ_f} est solution de l'EDP et

$$\mathrm{d}B^F(t,T) = (\sigma_f^*(t,T^O) - \sigma_f^*(t,T))B^F(t,T)\mathrm{d}W_t^F$$

donc

$$\mathrm{d}\pi_{\sigma_f}(t,B^F(t,T)) = \nabla\pi_{\sigma_f}(t,B^F(t,T))(\sigma_f^*(t,T^O) - \sigma_f^*(t,T))B^F(t,T)\mathrm{d}W_t^F$$

qui donné la forme intégrale

$$\pi_{\sigma_f}(T^O,B^F(T^O,T)) = \pi_{\sigma_f}(t,B^F(t,T))$$

$$+\int_t^{T^O} \nabla\pi_{\sigma_f}(s,B^F(s,T))(\sigma_f^*(s,T^O) - \sigma_f^*(s,T))B^F(s,T)\mathrm{d}W_s^F$$

En prenant l'espérance par rapport à $\mathbb{E}^F[\,\cdot\,|\mathcal{F}_t]$ on obtient

$$\pi_{\sigma_f}(t,B^F(t,T)) = \mathbb{E}^F[\pi_{\sigma_f}(T^O,B^F(T^O,T))|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^F[\phi(B^F(T^O,T))|\mathcal{F}_t] = V_t^F$$

par la condition limite sur π_{σ_f} pour $t = T^O$. En conclusion on a montré que

$$V_t^F = \pi_{\sigma_f}(0,B^F(0,T)) + \int_0^t \nabla\pi_{\sigma_f}(s,B^F(s,T))\mathrm{d}B^F(s,T)$$

et donc que $H_s = \nabla\pi_{\sigma_f}(s,B^F(s,T))$ et que $H_t^O = V_t^F - H_tB^F(t,T)$ ce qui décrit complètement la stratégie de couverture.