Quelques propriétés des diffusions

On considère l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = F(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x \tag{1}$$

avec une dérive $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ quelconque. Si F est une fonction globalement Lipshitz la solution de l'eq. (5) existe pour tout t et elle est unique. Le flot $x \mapsto X_t(x)$ engendré par (5) est Lipshitz continu:

$$|X_t(x) - X_t(y)| \leqslant |x-y| + \int_0^t |F(X_s(x) - X_s(y))|\mathrm{d}s \leqslant |x-y| + L\int_0^t |X_s(x) - X_s(y)|\mathrm{d}s$$

ou $L = \sup_{x\neq y} |F(x) - F(y)|/|x-y|$ est la constante de Lipshitz de F. A noter que la composante Brownienne est disparue dans cette estimation (due au fait que le coefficient devant $\mathrm{d}W$ dans l'EDS est constant), donc par Gronwall on obtient

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t(x) - X_t(y)| \leqslant |x-y|e^{LT} \tag{2}$$

d'où l'on peut conclure la continuité Lipshitz de $x \mapsto X_t(x)$ uniformément en t dans un compact.

Soit $C_b(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Banach des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^d$. La norme est donnée par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$. Pour $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ on pose $P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t(x))$ pour tout $t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^d$.

Lemme 1. *La famille d'opérateurs $(P_t)_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe d'opérateurs bornés sur $C_b(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. D'abord on montre que pour tout $t \geqslant 0$ et $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ on a $P_t f \in C_b(\mathbb{R}^d)$:

$$|P_t f(x) - P_t f(y)| \leqslant \mathbb{E}[|f(X_t(x)) - f(X_t(y))|] \leqslant \sup_{|x'-y'|\leqslant e^{LT}|x-y|} |f(x') - f(y')| \to 0$$

pour $|x-y| \to 0$ où on a utilisé l'eq. (2). Il reste de montrer la propriété de semigroupe : $P_{t+s} f = P_s P_t f$ pour tout f continue et bornée. Par unicité de la solution on a que si l'on pose

$$X_{ts}(x) = x + \int_s^t F(X_u)\mathrm{d}u + W_t - W_s$$

alors $X_{t(x)} = X_{t0}(x)$ et $X_{tu}(X_{us}(x)) = X_{ts}(x)$ pour tout $t \geqslant u \geqslant s \geqslant 0$. Le processus $(W_{t+s} - W_s)_{t\geqslant 0}$ a la même loi que $(W_t)_{t\geqslant 0}$ donc $(X_{t+s,s}(x))_{t\geqslant 0}$ a la même loi que $(X_t(x))_{t\geqslant 0}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et en plus il est indépendant de $\mathcal{F}_s$:

$$P_{t+s} f(x) = \mathbb{E}[f(X_{t+s}(x))] = \mathbb{E}[f(X_{t+s,s}(X_s(x)))] = \mathbb{E}[P_t f(X_s(x))] = P_s P_t f(x). \qquad \square$$

Régularité des solutions

Si F est régulière le flot des solutions X et le semigroupe P associé héritent les mêmes propriétés de régularité. Dans ce cas particulier ou le coefficient de diffusion ne dépend pas de la solution, il existe une preuve facile de la régularité du flot. Soit $C_b^n(\mathbb{R}^d; V)$ l'espace des fonctions à valeurs dans l'espace vectoriel V avec dérivée deuxième continue et bornée. Soit $\nabla_h f$ la dérivée dans la direction $h \in \mathbb{R}^d$ de la fonction $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$: donc $\nabla_h f = \langle h, \nabla f \rangle$ où $\nabla f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est le gradient de f. De même on appelle $\nabla_{h,k}^2 f = \nabla_h \nabla_k f$ la dérivée deuxième dans les directions $k, h \in \mathbb{R}^d$.

Lemme 2. *Si $F \in C_b^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ alors $x \mapsto X_t(x) \in C_b^2$ p.s. et*

$$|\nabla_h X_t(x)| \leqslant C_T |h|, \qquad |\nabla_{h,k}^2 X_t(x)| \leqslant C_T |h||k|$$

pour tout $t \in [0, T]$. La constante C_T ne dépend pas de ω.

Démonstration. Soit $Y_t(x) = X_t(x) - W_t$. Alors pour tout $t \geqslant 0$:

$$Y_t(x) = x + \int_s^t F(Y_s(x) + W_s) \mathrm{d}s.$$

Donc $Y_t(x)$ est la solution d'une EDO avec dérive aléatoire. En effet les trajectoires Browniennes étant continues p.s. on peut considérer cette équation pour presque tout $\omega \in \Omega$ et par considérations classiques montrer que $Y_t(x)$ est partout differentiable deux fois avec continuité la même chose se passe pour $X_t(x)$ avec $\nabla X_t(x) = \nabla Y_t(x)$ et $\nabla^2 X_t(x) = \nabla^2 Y_t(x)$. On a aussi

$$\nabla_h X_t(x) = h + \int_0^t \nabla F(X_s(x)) \cdot \nabla_h X_s(x) \mathrm{d}s$$

et

$$\nabla_{h,k}^2 X_t(x) = \int_0^t \nabla F(X_s(x)) \cdot \nabla_{h,k}^2 X_s(x) \mathrm{d}s + \int_0^t \nabla^2 F(X_s(x)) \cdot \nabla_h X_s(x) \cdot \nabla_k X_s(x) \mathrm{d}s$$

Pour estimer la croissance de $\nabla_h X_t(x)$, on calcule

$$\frac{d}{dt} |\nabla_h X_t(x)|^2 = 2 \langle \nabla_h X_t(x), \nabla F(X_t(x)) \cdot \nabla_h X_t(x) \rangle \leqslant 0$$

et donc $|\nabla_h X_t(x)| \leqslant |h|$ pour tout $t \geqslant 0$. Pour $\nabla_{h,k}^2 X_t(x)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\nabla_{h,k}^2 X_t(x)|^2 = & \; 2 \langle \nabla_{h,k}^2 X_t(x), \nabla F(X_t(x)) \cdot \nabla_{h,k}^2 X_t(x) \rangle \\ & + 2 \langle \nabla_{h,k}^2 X_t(x), \nabla^2 F(X_s(x)) \cdot \nabla_h X_s(x) \cdot \nabla_k X_s(x) \rangle \\ \leqslant & \; 2 |\nabla^2 F(X_s(x))| |\nabla_{h,k}^2 X_t(x)| \end{aligned}$$

et si on fait l'hypothèse que $|\nabla^2 F(x)|$ est uniformément bornée par K on obtient $|\nabla_{h,k}^2 X_t(x)| \leqslant 2KT |h||k|$. □

Théorème 3. *Soit $u(t, x) = P_t f(x)$. Si $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ alors $u(t, x)$ est deux fois differentiable avec continuité en x et une fois en t, $\|\nabla u(t, x)\|_\infty \leqslant \|\nabla f\|_\infty$ et*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \mathcal{L} u(t, x)$$

où $\mathcal{L} g(x) = \frac{1}{2} \Delta g(x) + \langle F(x), \nabla g(x) \rangle$.

Démonstration. Pour Itô formula

$$f(X_t(x)) = f(x) + \int_0^t \nabla f(X_s(x)) \cdot \mathrm{d}W_s + \int_0^t \mathcal{L}f(X_s)\mathrm{d}s$$

puisque ∇f est borné, prenant l'espérance des deux cotés on obtient $u(t,\ x) = f(x) + \int_0^t P_s\mathcal{L}f(x)\mathrm{d}s$ qui montre que $u(t,x)$ est differentiable en temps et que $\partial u(t,x)/\partial t$ est continue en $(t,\ x)$. Pour prouver que u est aussi differentiable deux fois par rapport a x on utilise le lemme 2:

$$\nabla_h u(t,x) = \mathbb{E}[\nabla f(X_t(x)) \cdot \nabla_h X_t(x)]$$

$$\nabla^2_{h,k} u(t,x) = \mathbb{E}[\nabla^2 f(X_t(x)) \cdot \nabla_h X_t(x) \cdot \nabla_k X_t(x)] + \mathbb{E}[\nabla f(X_t(x)) \cdot \nabla^2_{h,k} X_t(x)]$$

en effet les quantités dans l'espérance sont uniformément bornées en x, donc on peut échanger l'espérance avec les dérivations. Donc $\mathcal{L}u(t,x)$ est continue en (t,x) et Pour tout $t \in [0,T]$ on a les estimations

$$\|\nabla u(t,x)\|_\infty \leqslant C_{T,f}, \qquad \|\nabla^2 u(t,x)\| \leqslant C_{T,f}, \qquad \|\mathcal{L}u(t,x)\|_\infty \leqslant C_{T,f,F}(1+|x|).$$

où pour obtenir la dernière estimation on a utilisé que F est à croissance linéaire.

Fixons $t>0$ et appliquons la formule d'Itô au processus $s \mapsto u(t-s, X_s(x))$:

$$u(t-s, X_s(x)) = u(t,x) + \int_0^s \nabla u(t-r, X_r(x))\mathrm{d}W_r + \int_0^s \left[\frac{\partial}{\partial r}u + \mathcal{L}u\right](t-r, X_r(x))\mathrm{d}r$$

et on prend l'espérance. L'intégrale stochastique donc disparaît grâce au fait que ∇u est borné. De plus on a que $\mathbb{E}u(t-s, X_s(x)) = \mathbb{E}P_{t-s}f(X_s(x)) = P_s P_{t-s}f(x) = P_t f(x) = u(t,x)$, donc pour tout $s \in [0,t]$:

$$\int_0^s \mathbb{E}\left[-\frac{\partial}{\partial t}u + \mathcal{L}u\right](t-r, X_r(x))\mathrm{d}r = 0$$

Dérivant cette quantité par rapport à s et prenant la limite $s \to 0+$ on obtient que $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \mathcal{L}u(t,x)$ pour tout $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. □

Ce dernier théorème donne une méthode probabiliste pour resoudre l'EDP parabolique si les coefficients et la donnée initiale sont suffisamment réguliers.

Formule de Bismut-Elworthy-Li

On va démontrer une représentation probabiliste pour la dérivée de $P_t f(x)$ par rapport a x. Rappelons que on a $\nabla_h P_t f(x) = \mathbb{E}[\nabla f(X_t(x)) \cdot \nabla_h X_t(x)]$. Pour t fixé considérons le processus $u(t-s,\ X_s(x))$. Comme on l'à déjà vu, ce processus est une martingale. En effet, la formule d'Itô donne

$$f(X_t(x)) = u(0, X_t(x)) = u(t,x) + \int_0^t \langle \nabla u(t-u, X_u(x)), \mathrm{d}W_u\rangle$$

la correction d'Itô étant nulle. Soit $J_t = \int_0^t \langle \nabla_h X_u(x), \mathrm{d}W_u\rangle$, alors

$$\mathbb{E}\left[J_t^h \int_0^t \langle \nabla u(t-u, X_u(x)), \mathrm{d}W_u\rangle\right] = \mathbb{E}\int_0^t \langle \nabla u(t-u, X_u(x)), \nabla_h X_u(x)\rangle \mathrm{d}u$$

et $\mathbb{E}\big[J_t^h u(t,x)\big]=0$. Donc on obtient que

$$\mathbb{E}[J_t^h f(X_t(x))]=\mathbb{E}\int_0^t \langle \nabla u(t-u,X_u(x)),\nabla_h X_u(x)\rangle \mathrm{d}u=\int_0^t \nabla_h P_u(P_{t-u}f)(x)\mathrm{d}u=t\nabla_h P_t f(x)$$

ou, autrement dit,

$$\nabla_h P_t f(x)=\frac{1}{t}\mathbb{E}\bigg[f(X_t(x))\int_0^t \langle \nabla_h X_u(x),\mathrm{d}W_u\rangle\bigg]$$

qui est une formule très intéressante, car elle exprime la dérivée du semigroupe comme une espérance de la fonction f sans faire apparaître ses dérivées. En particulier grâce à la borne $\mathbb{E}|\nabla_h X_t(x)|^2\leqslant C_T|h|^2$ on a l'estimation

$$|\nabla_h P_t f(x)|\leqslant t^{-1}\|f\|_\infty\Bigg(\mathbb{E}\bigg[\int_0^t \langle \nabla_h X_u(x),\mathrm{d}W_u\rangle\bigg]^2\Bigg)^{1/2}\leqslant \frac{C_T|h|}{t^{1/2}}\|f\|_\infty.$$

Par convergence dominée, la formule s'étend à toutes fonctions f mesurables et bornées. On dit que le semigroupe est *strong-Feller* pour signifier qu'il envoie des fonctions bornées en fonctions continues (dans ce cas même Lipshitziennes).

Pour estimer les dérivées d'ordre plus élevé on utilise une astuce. En écrivant $P_t f=P_{t/2}P_{t/2}f$ on a

$$\begin{aligned}\nabla^2_{h,k}P_t f(x)&=\nabla_h\nabla_k P_{t/2}(P_{t/2}f)(x)=\nabla_k\frac{2}{t}\mathbb{E}\bigg[P_{t/2}f(X_{t/2}(x))\int_0^{t/2}\langle \nabla_h X_u(x),\mathrm{d}W_u\rangle\bigg]\\&=\frac{2}{t}\mathbb{E}\bigg[\langle \nabla P_{t/2}f(X_{t/2}(x)),\nabla_k X_{t/2}(x)\rangle\int_0^{t/2}\langle \nabla_h X_u(x),\mathrm{d}W_u\rangle\bigg]\\&\quad+\frac{2}{t}\mathbb{E}\bigg[P_{t/2}f(X_{t/2}(x))\int_0^{t/2}\langle \nabla^2_{h,k}X_u(x),\mathrm{d}W_u\rangle\bigg]\end{aligned}$$

qui donne l'estimation suivante

$$|\nabla^2_{h,k}P_t f(x)|\leqslant\frac{C_T|h\|k|}{t}\|f\|_\infty$$

pour tout $t\in]0,T]$.

Les mesures invariantes pour les diffusions

Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ est *invariante* pour l'EDS (1) si

$$\int P_t f(x)\,\mu(\mathrm{d}x)=\int f(x)\mu(\mathrm{d}x),\qquad \forall f\in C_b(\mathbb{R}^d),t\geqslant 0 \tag{3}$$

et est *réversible* si

$$\int g(x)P_t f(x)\,\mu(\mathrm{d}x)=\int f(x)P_t g(x)\,\mu(\mathrm{d}x),\qquad \forall f,g\in C_b(\mathbb{R}^d),t\geqslant 0. \tag{4}$$

Une mesure réversible est invariante, car on peut prendre $g(x)=1$ dans la (4) et obtenir la (3) à l'aide de la relation $P_t 1=1$. Si μ est invariante, par Jensen on a

$$\int |P_t f(x)|^p\mu(\mathrm{d}x)\int P_t[|f|^p](x)\mu(\mathrm{d}x)\leqslant\int |f(x)|^p\mu(\mathrm{d}x)$$

Pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et $p \geqslant 1$. Donc $\|P_t f\|_{L^p(\mu)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mu)}$ et par densité on peut étendre P_t à tout $L^p(\mu)$. Il est clair que si μ est réversible alors P_t est symetrique dans $L^2(\mu)$.

Si μ est une mesure invariante et X_0 est une variable aléatoire de loi μ indépendant de $(W_t)_{t \geqslant 0}$ alors la solution de l'EDS issue de X_0, i.e. $X_t = X_t(X_0)$ satisfait $\mathbb{E}[f(X_t)] = \mathbb{E}[f(X_0)]$: la loi de X_t est encore μ. De façon plus general, le processus X_t est *stationnaire*: la loi de $(X_{t+a})_{t \geqslant 0}$ ne dépend pas de $a \geqslant 0$.

Un exemple très facile à étudier d'EDS dans la forme (1) est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2} X_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x.$$

Cette EDS admet une solution explicite donnée par une formule de variation des constantes

$$X_t = e^{-t/2} x + \int_0^t e^{-(t-s)/2} \mathrm{d}W_s$$

Il est immédiat de vérifier que la loi $\mu_{x,t}$ de X_t est une loi normale d-dimensionelle $\mathcal{N}(e^{-t/2}x, (1-e^{-t})\mathbb{I}_{d\times d})$. Le semigroupe P_t a la forme explicite (formule de Melher)

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t)) = \mathbb{E}[f(e^{-t/2}x + (1-e^{-t})^{1/2} Z)]$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_{d\times d})$ est une v.a. Gaussienne standard dans $\mathbb{R}^d$. On peut aussi vérifier que la mesure Gaussienne standard μ est invariante pour X_t: en effet

$$\int P_t f(x)\, \mu(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}[f(e^{-t/2}\hat{Z} + (1-e^{-t})^{1/2} Z)] = \mathbb{E}[f(\hat{Z})] = \int f(x) \mu(\mathrm{d}x)$$

où l'on a noté $\hat{Z}$ une Gaussienne standard indépendante de Z et où on a utilisé le fait que la v.a. $e^{-t/2}\hat{Z} + (1-e^{-t})^{1/2} Z$ est encore $\mathcal{N}(0, \mathbb{I}_{d\times d})$. Avec la solution explicite il est facile de voir aussi que $\lim_{t\to\infty} P_t f(x) = \int f(x)\mu(\mathrm{d}x)$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$. Cela entraîne tout de suite que la mesure invariante est unique: si ν est une autre mesure invariante pour X on a que, par convergence dominée $\int f(x)\nu(\mathrm{d}x) = \int P_t f(x)\nu(\mathrm{d}x) \to \int f(x)\mu(\mathrm{d}x)$, pour tout f continue bornée. Donc nécessairement $\nu = \mu$. On voit aussi que pour toutes conditions initiales x la solution $X_t(x)$ converge faiblement vers la solution stationnaire $X_t(X_0)$.

Les diffusions gradientes

On s'intéresse maintenant à l'EDS particulière

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2} \nabla U(X_t) \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x \tag{5}$$

avec $X_t \in \mathbb{R}^d$ et $U: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe qui s'appelle traditionnellement *potentiel*. Ce genre d'EDS est une diffusion gradiente puisque le terme de dérive déterministe est le gradient de la fonction potentiel.

Maintenant on va etablir l'existence et l'unicité de la mesure invariante pour une diffusion generique dans la forme (5). A noter que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un exemple particulièr de diffusion gradiente avec pour potentiel la forme quadratique $U(x) = |x|^2/2$.

Dans le reste de la section, on pose les hypothèses suivantes sur le potentiel:

1. $U: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est trois fois differentiable avec continuité et $\nabla^3 U$ est borné.

2. $\nabla^2 U \geqslant \delta \mathbb{I}_{d\times d}$, donc U est strictement convexe sur tout $\mathbb{R}^d$.

La première hypothèse nous garantit que $F(x) = -\nabla U(x)$ satisfait les hypothèses nécessaires pour contrôler l'existence globale des solutions de l'EDS et la régularité C_b^2 du flot stochastique.

On considère la mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\mu(\mathrm{d}x) = \frac{e^{-U(x)}\mathrm{d}x}{Z}$$

où Z est la constante de normalisation. L'hypothèse de stricte convexité entraîne que $U(x) \geqslant U(0) + \delta|x|^2/2$ et donc que $Z = \int e^{-U(x)}\mathrm{d}x < +\infty$ est bien défini.

Théorème 4. *La mesure μ est l'unique mesure invariante pour l'EDS (5).*

Démonstration. D'abord on montre que μ est une mesure invariante. Par intégration par partie sur la mesure de Lebesgue et par convergence dominée, on a que

$$\int \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle e^{-U(x)}\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{div}\,[\nabla g(x) e^{-U(x)}]\mathrm{d}x$$

pour tout $f, g \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$. Ce qui donne la formule suivante d'intégration par partie par rapport à la mesure μ:

$$\int f(x)\,\mathcal{L}g(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle \mu(\mathrm{d}x)$$

où $2\mathcal{L}g(x) = \Delta g(x) - \langle \nabla U(x), \nabla g(x)\rangle$. Si on prend $f(x) = 1$ on obtient que

$$\int \mathcal{L}g(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = 0. \tag{6}$$

Soit maintenant $u(t, x) = P_t f(x)$ pour $f \in C_b^2$. Alors

$$u(t, x) = f(x) + \int_0^t \mathcal{L}u(s, x)\mathrm{d}s$$

et en intégrant cette dernière équation par rapport à $\mu(\mathrm{d}x)$, on a que

$$\int u(t, x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_0^t \mathrm{d}s \int \mathcal{L}u(s, x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

par Fubini-Tonelli et par la formule (6), en effet on remarque que $|\mathcal{L}u(s, x)| \leqslant C(1 + |x|)$ et que $\int |x|\mu(\mathrm{d}x) < \infty$. Donc $\int f(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int P_t f(x)\mu(\mathrm{d}x)$ pour tout $f \in C_b^2$ et par densité et convergence dominée on peut conclure que ça reste vrai pour tout $f \in C_b$.

Maintenant on va etablir l'unicité de la mesure invariante. On considère deux solutions issues des conditions initiales y, z, l'on note $Y_t = X_t(y)$ et $Z_t = X_t(z)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|Y_t - Z_t|^2 = -\langle Y_t - Z_t, \nabla U(Y_t) - \nabla U(Z_t)\rangle$$

si l'on tient compte de l'identité $\nabla U(Y_t) - \nabla U(Z_t) = \int_0^1 \mathrm{d}\tau \nabla^2 U(Z_t + \tau(Y_t - Z_t)) \cdot (Y_t - Z_t)$ on peut en déduire que

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}|Y_t - Z_t|^2 = -\int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\langle Y_t - Z_t, \nabla^2 U(Z_t + \tau(Y_t - Z_t)) \cdot (Y_t - Z_t)\rangle \leqslant -\delta|Y_t - Z_t|^2$$

par la stricte convexité de U. Donc

$$|X_t(y) - X_t(z)| \leqslant |y - z| e^{-\delta t/2}$$

et on voit que la stricte convexité du potentiel a pour effet de rapprocher à vitesse exponentielle deux solutions issues de points différents. Cela entraîne l'unicité de la mesure invariante μ. En effet, s'il existe une autre mesure invariante ν, on peut écrire

$$\int f(x)\mu(\mathrm{d}x) - \int f(x)\nu(\mathrm{d}x) = \int P_t f(x)\mu(\mathrm{d}x) - \int P_t f(x)\nu(\mathrm{d}x).$$

Par linéarité de l'espérance l'expression à droite fait apparaître le flot de l'EDS:

$$\int P_t f(x)\mu(\mathrm{d}x) - \int P_t f(x)\nu(\mathrm{d}x) = \int \mathbb{E}[f(X_t(x)) - f(X_t(y))]\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y).$$

Pour f Lipshitz et bornée il existe une constante L tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant L(1 \wedge |x - y|)$ et donc on peut estimer

$$\left| \int f(x)\mu(\mathrm{d}x) - \int f(x)\nu(\mathrm{d}x) \right| \leqslant \int \mathbb{E}[|f(X_t(x)) - f(X_t(y))|]\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y)$$

$$\leqslant L \int \mathbb{E}[1 \wedge |X_t(x) - X_t(y)|]\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y) \leqslant L \int (1 \wedge e^{-\delta t/2}|x - y|)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y)$$

qui tend vers zéro par convergence dominée quand $t \to \infty$. Donc $\int f(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x)\nu(\mathrm{d}x)$ pour tout f Lipshitz et bornée, ce qui, par densité, est suffisant pour conclure que $\mu = \nu$. □

A noter que l'argument d'unicité donne aussi le résultat de convergence suivante:

$$\lim_{t \to \infty} P_t f(x) = \int f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

Pour tout f continue et bornée et tout $x \in \mathbb{R}^d$.