Regularité des processus stochastiques

Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^k}$ une famille des variables aléatoires indexées par le paramètre k-dimensionnel $t\in\mathbb{R}^k$. On va démontrer le théorème suivante.

Théorème 1. *[Kolmogorov] Si existent $p>0, \alpha>k/p$ t.q.*

$$\mathbb{E}[|X_t-X_s|^p] \lesssim |t-s|^{\alpha p} \tag{1}$$

alors il existe une variable aléatoire $\tilde{X}$ à valeurs dans les fonctions continue sur $\mathbb{R}^k$ tel que $\mathbb{P}(X_t=\tilde{X}_t)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}^k$ et tel que pour tout $L>0$,

$$\sup_{t,s\in[-L,L]^k} \frac{|\tilde{X}(\omega)_t-\tilde{X}(\omega)_s|}{|t-s|^\gamma} \leq C_L(\omega)<\infty$$

pour presque tout $\omega\in\Omega$.

La démonstration de ce théorème est basée sur un lemme dû à Garcia, Rodemich et Rumsey qui permet un contrôle ponctuel de la régularité d'une fonction continue à l'aide d'une quantité intégrale de la même fonction.

Dans le lemme on considère un espace métrique générale (Λ,d) avec une mesure m (sur les Boréliens de Λ). On note $B(x,r)=\{y\in\Lambda: d(x,y)\leq r\}$ la boule de rayon r centrée en $x\in\Lambda$ et avec $\sigma(r)=\inf_{x\in\Lambda} m(B(x,r))$ le plus petit volume selon m d'un boule de rayon r. Un cas particulier qui peut aider la compréhension de la preuve est de prendre $\Lambda=[0,1]$ avec la distance euclidienne $d(t,s)=|t-s|$ et pour m la mesure de Lebesgue: dans ce cas $\sigma(r)=2r$.

Lemme 2. *[Garcia-Rodemich-Rumsey] Soit f: $\Lambda\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur l'espace métrique (Λ,d), m une mesure sur Λ et Ψ: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction positive, croissante et convexe avec $\Psi(0)=0$. Soit*

$$U=\iint_{\Lambda\times\Lambda}\Psi\left(\frac{|f(t)-f(s)|}{d(t,s)}\right)m(\mathrm{d}t)m(\mathrm{d}s)$$

alors

$$|f(t)-f(s)|\leq 18\int_0^{d(t,s)/2}\Psi^{-1}\left(\frac{U}{\sigma(r)^2}\right)dr$$

ou Ψ^{-1} dénote l'inverse de Ψ (que est encore une fonction positive, croissante et concave).

Démonstration. Si note $\overline{f}(A)=\int_A f(t)m(dt)/m(A)$ la moyenne de f sur l'ensemble A, alors pour deux Boréliens $A,B\subset\Lambda$ on a

$$\overline{f}(A)-\overline{f}(B)=\iint_{A\times B}(f(t)-f(s))\frac{m(\mathrm{d}t)m(\mathrm{d}s)}{m(A)m(B)}$$

$$=\Psi^{-1}\left[\Psi\left(\iint_{A\times B}d(t,s)\frac{f(t)-f(s)}{d(t,s)}\frac{m(\mathrm{d}t)m(\mathrm{d}s)}{m(A)m(B)}\right)\right]$$

Donc si on pose $d(A, B) = \sup_{t \in A, s \in B} d(t, s)$ on peut estimer la différence des moyennes par

$$|\overline{f}(A) - \overline{f}(B)| \leq d(A, B)\Psi^{-1}\left[\Psi\left(\iint_{A \times B} \frac{f(t) - f(s)}{d(t, s)} \frac{m(\mathrm{d}t)m(\mathrm{d}s)}{m(A)m(B)}\right)\right]$$

et par l'inégalité de Jensen et la concavité de Ψ ça c'est plus petit que

$$\leq d(A, B)\Psi^{-1}\left[\iint_{A \times B} \Psi\left(\frac{f(t) - f(s)}{d(t, s)}\right) \frac{m(\mathrm{d}t)m(\mathrm{d}s)}{m(A)m(B)}\right]$$

Donc par une majoration brutale

$$|\overline{f}(A) - \overline{f}(B)| \leq d(A, B)\Psi^{-1}\left(\frac{U}{m(A)m(B)}\right) \tag{2}$$

Soit maintenant $\bar{f}(t, r) = \bar{f}(B(t, r))$ et $\lambda_k = d(t, s)/2^{-k}$ pour $k = 0, 1, \ldots$. Alors

$$\begin{aligned} \left|\bar{f}(t, \lambda_n) - \bar{f}(t, \lambda_0)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} (\bar{f}(t, \lambda_{k+1}) - \bar{f}(t, \lambda_k))\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left|\bar{f}(t, \lambda_{k+1}) - \bar{f}(t, \lambda_k)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_{k+1} + \lambda_k)\Psi^{-1}\left(\frac{U}{\sigma(\lambda_{k+1})\sigma(\lambda_k)}\right) \end{aligned}$$

ou on a utilisé l'eq.(2) remarquant que $d(B(t, a), B(t, b)) = a + b$. On cherche a estimer la série que on a obtenu par un intégrale (que sera plus facile a manier). A ce fin on note que

$$\lambda_{k+1} + \lambda_k = \frac{3\,d(t, s)}{2^{k+1}} = 6(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+2})$$

et que $\sigma(\lambda_k) \geqslant \sigma(\lambda_{k+1}) \geqslant \sigma(r)$ pour tout $r \leqslant \lambda_{k+1}$ donc

$$\left|\bar{f}(t, \lambda_n) - \bar{f}(t, \lambda_0)\right| \leqslant 6 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\lambda_{k+2}}^{\lambda_{k+1}} \Psi^{-1}\left(\frac{U}{\sigma(r)^2}\right) \mathrm{d}r = 6 \int_0^{d(t,s)/2} \Psi^{-1}\left(\frac{U}{\sigma(r)^2}\right) \mathrm{d}r$$

Maintenant il suffit de prendre la limite pour $n \to \infty$ dans le membre de gauche et utiliser la continuité de f pour pouvoir conclure que le même intégrale donne une borne supérieure pour $\left|\bar{f}(t, \lambda_n) - \bar{f}(t, \lambda_0)\right|$. En utilisant encore une fois l'eq.(2) on a que

$$\left|\bar{f}(t, \lambda_0) - \bar{f}(s, \lambda_0)\right| \leqslant 3\lambda_0 \Psi^{-1}\left(\frac{U}{\sigma(\lambda_0)^2}\right) \leqslant 6 \int_0^{d(t,s)/2} \Psi^{-1}\left(\frac{U}{\sigma(r)^2}\right) \mathrm{d}r$$

d'ou l'on parvient facilement à la thèse. □

On peut maintenant passer à la démonstration du Théorème 1.

Démonstration. Fixons $L > 0$. Pour chaque entier $N > 0$ on considère le sous-ensemble fini $\Lambda_N = (\mathbb{Z}/2^N)^k \cap [-L, L]^k \subseteq \mathbb{R}^k$ et on applique le Lemme 2 à la fonction X_t définie sur T et donc trivialement continue. La mesure m_N est la mesure de comptage sur Λ_N normalisé à $(2L)^k$, $d(t, s) = |t - s|^\beta$ et $\Psi(x) = x^p$. On peut montrer qu'il existe une constante $c>0$ telle que $\sigma(r) \geqslant c r^{k/\beta}$ pour tout $r > 0$ uniformément en N. Un calcul direct donne, alors, que

$$|X_t - X_s| \leqslant C U_N^{1/p} d(t, s)^{1 - 2k/\beta p}.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t,s\in\Lambda_N}\frac{|X_t-X_s|}{d(t,s)^{1-2k/\beta p}}\right)^p \leqslant C^p \iint_{\Lambda_N\times\Lambda_N} \mathbb{E}\left(\frac{|X_t-X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^p 1_{t\neq s}\frac{m_N(\mathrm{d}t)m_N(\mathrm{d}s)}{|t-s|^{p(\beta-\alpha)}}$$

ou l'on a appliqué Fubini-Tonelli pour échanger l'intégrale avec l'espérance. Cela donne que

$$\mathbb{E}(Z_N^p)\leqslant C^p \sup_{t,s\in[-L,L]^k}\mathbb{E}\left(\frac{|X_t-X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^p \iint_{\Lambda_N\times\Lambda_N} 1_{t\neq s}\frac{m_N(\mathrm{d}t)m_N(\mathrm{d}s)}{|t-s|^{p(\beta-\alpha)}}$$

ou

$$Z_N=\sup_{t,s\in\Lambda_N}\frac{|X_t-X_s|}{|t-s|^{\beta-2k/p}}.$$

L'intégrale double est uniformément borné en N si $p(\beta-\alpha)<k$ et ainsi on obtient l'uniforme intégrabilité des variables aléatoires Z_N. De plus on a que $\Lambda_N\subseteq\Lambda_{N+1}$ et donc la série Z_N est croissante. Par convergence monotone on a que

$$Z_\infty=\sup_N Z_N=\sup_{t,s\in\Lambda_0}\frac{|X_t-X_s|}{|t-s|^{\beta-2k/p}}$$

est p.s. finie ou $\Lambda_0=\cup_N\Lambda_N$ est un ensemble dénombrable et dense dans $[-L,L]^k$. Grâce à la condition $\alpha>k/p$ l'on peut choisir $\beta<\alpha+k/p$ tel que $\beta-2k/p>0$. Donc presque sûrement la fonction $X\colon\Lambda_0\to\mathbb{R}$ est Hölderienne d'index $\gamma=\beta-2k/p<\alpha-k/p$ et admet une prolongation continue a tout $[-L,L]^k$ qui on dénote par $\tilde{X}$. C'est maintenant facile de voir que la condition (1) implique la continuité en probabilité de X et donc que $\mathbb{P}(X_t=\tilde{X}_t)=1$ pour tout $t\in[-L,L]^k$. Étant L arbitraire on peut construire une telle version continue de X pour une suite dénombrable et croissante vers l'infini de L et donc obtenir une version continue sur tout $\mathbb{R}^k$. □

Exemple 3. Si B_t est un mouvement Brownien standard unidimensionnel on a que

$$\mathbb{E}|B_t-B_s|^p=C_p|t-s|^{p/2}$$

donc d'après le Theoreme 1 il existe une version de B_t qui est Hölder continue pour tout $\gamma<1/2$. Il est facile de voir que l'index de Hölder ne peut pas être 1/2: en particulier on va montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0<s<t<1}\frac{|B_t-B_s|}{|t-s|^{1/2}}=+\infty\right)=1. \tag{3}$$

On commence par minorer la norme Hölder: pour chaque $n>0$, on considere la partition $\{t_k=k/n\colon k=0,\ldots,n\}\subseteq[0,1]$ qui donne que

$$\sup_{0<s<t<1}\frac{|B_t-B_s|}{|t-s|^{1/2}}\geqslant\sup_{k=0,\ldots,n-1}A_k$$

ou $A_k=|B_{t_{k+1}}-B_{t_k}|/|t_{k+1}-t_k|^{1/2}$. Les v.a. $\{A_k\colon k=0,\ldots,n-1\}$ forment une famille iid avec loi Gaussien standard et donc

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k=0,\ldots,n-1}A_k\geqslant L\right)=1-\mathbb{P}(A_1<L)^n\to 0\qquad\text{pour } n\to\infty.$$

Etant L arbitraire cela implique l'eq (3).

Exercice 1. Appliquer le Lemme 2 a B_t avec la fonction $\Psi(x) = e^{\lambda x^2} - 1$. Quelle estimation ça donne pour la v.a. $\rho(\delta) = \sup_{t,s:|t-s| \leqslant \delta} |B_t - B_s|$?

Regularité des EDS

[reference: H. Kunita, Stochastic differential equations and stochastic flowsof diffeomorphisms, Lect. Notes in Math. vol. 1097, Springer-Verlag (1984)]

Soit $\{V_k: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\}_{k=0,\ldots,m}$ une famille de champs de vecteurs dépendent du temps sur $\mathbb{R}^d$ et pour $s > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ soit $t \mapsto \xi_{st}(x)$ la solution de l'EDS

$$\xi_{st}(x) = x + \sum_{k=0}^{m} \int_s^t V_k(r, \xi_{sr}(x)) \mathrm{d}B_r^k \tag{4}$$

ou $(B_\cdot^k)_{k=1,\ldots,m}$ est une famille des mouvement Browniens standard et ou $B_t^0 = t$ donne la composante de dérive déterministe. On fait l'hypothèse que les champs de vecteurs V_k sont globalement Lipshitziens et à croissance au plus linéaire, i.e. qu'il existe une constante M tel que

$$|V_k(t,x) - V_k(t,y)| \leqslant M|x-y| \quad \text{et que} \quad |V_k(t,x)| \leqslant M(1+|x|)$$

uniformément en $t \geqslant 0$. Alors il est bien connu que l'EDS (4) admet une unique solution adapté à la filtration $\mathcal{F}_{st} = \sigma(B_u - B_s: u \in [s, +\infty[)$ engendrée par les incréments du mouvement Brownien. Par construction il est aussi clair que, pour s, x fixé, le processus $t \mapsto \xi_{st}(x)$ est continu. Ici on va s'intéresser à la régularité du processus $(s,t,x) \mapsto \xi_{st}(x)$ par rapport à l'ensemble de variables s, t, x. Nos outils fondamentaux seront le lemme de Kolmogorov/Garcia-Rodemich-Rumsey, la formule de Itô et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.

Le résultat principale est le suivante:

Théorème 4. *Il existe une fonction aléatoire $\xi_{st}(x)$ qui est Hölder continue en s,t,x d'exposants α, α, β pour tout $\alpha < 1/2$ et $\beta < 1$. De plus on a que presque sûrement l'eq. (4) est verifié pour tout s, t, x et la proprieté de flot $\xi_{ut}(\xi_{su}(x)) = \xi_{st}(x)$ est valable pour tout s, t, x.*

Démonstration. La preuve est conséquence directe du Théorème 1 et de l'estimation

$$\mathbb{E}|\xi_{st}(x) - \xi_{s't'}(x')|^p \lesssim |x-x'|^p + (1+|x|+|x'|)(|s-s'|^{p/2} + |t-t'|^{p/2}) \tag{5}$$

qui l'on démontrerà dans le Theoreme 8. En effet, donné un compact $K \subseteq \mathbb{R}^d$ et $T > 0$ l'estimation (5) suffit pour appliquer le Theoreme 1 qui donne qu'il existe une versione continue en $(s, t, x) \in [0,T]^2 \times K$ de $\xi_{st}(x)$ pour laquel on a

$$|\xi_{st}(x) - \xi_{s't'}(x')| \leqslant C_{K,T,p,\alpha,\beta}(\omega)(|t-t'|^\alpha + |s-s'|^\alpha + |x-x'|^\beta)$$

uniformement en s, t, x pour tout $\alpha < 1/2$ et $\beta < 1$. Est facile aussi de montrer la continuité de l'integrale stochasitique dans l'eq. (4) et donc de conclure que l'EDS est satisfaite presque surement pout tout t, s, x (ou l'ensemble de mesure nulle donc ne depends pas de t, s, x). La proprieté de flot decoule de la regularité de $\xi_{st}(x)$ et du Corollaire 7. □

Remarque 5. Une application deterministe $\phi_{st}(x)$ qui satisfait $\phi_{ut} \circ \phi_{su} = \phi_{st}$ pour tout $s < u < t$ est appelé flot. Dans notre cas on peut bien appeler l'application ξ un *flot stochastique*.

Lemme 6. *Pour tout $p \in \mathbb{R}$, $T>0$ et $\varepsilon > 0$ on a les inégalités*

$$\mathbb{E}(\varepsilon + |\xi_{st}(x)|^2)^p \leqslant C_{\varepsilon,p,T}(\varepsilon + |x|^2)^p$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon + |\xi_{st}(x) - \xi_{st}(y)|^2)^p \leqslant C_{p,T}(\varepsilon + |x-y|^2)^p$$

pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. (Noter que la constante dans la deuxième inégalité ne dépends pas de ε.)

Démonstration. On pose $f(x) = (\varepsilon + |x|^2)$ et $F(x) = f(x)^p$. Un calcul facile donne

$$\nabla_i F(x) = 2 f(x)^{p-1} x \qquad \nabla_{ij}^2 F(x) = 2 p f(x)^{p-2}(f(x)\delta_{ij} + 2(p-1) x_i x_j), \qquad i, j = 1, \ldots, d$$

et si l'on note $Z_t = \xi_{st}(x)$ alors, par la formule de Itô appliqué a la semimartingale $F(Z_t)$ on a

$$F(Z_t) = F(Z_s) + \sum_{i=1}^d \int_s^t \nabla_i F(Z_r) \mathrm{d} Z_r^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_s^t \nabla_{ij}^2 F(Z_t) \mathrm{d}\langle Z^i, Z^j\rangle_r$$

ou

$$\mathrm{d} Z_r^i = \mathrm{d}\xi_{sr}^i(x) = \sum_{k=0}^m V_k^i(r, \xi_{sr}(x)) \mathrm{d} B_r^k,$$

$$\mathrm{d}\langle Z^i, Z^j\rangle_r = \sum_{k,l=0}^m V_k^i(r, \xi_{sr}(x)) V_l^j(r, \xi_{sr}(x)) \mathrm{d}\langle B^k, B^l\rangle_r = \sum_{k=1}^m V_k^i(r, \xi_{sr}(x)) V_k^j(r, \xi_{sr}(x)) \mathrm{d} t$$

donné que $\langle B^k, B^l\rangle_t = t$ si $k = l = 1, \ldots, m$ et il vaut zéro autrement (en particulier si $k = 0$ ou $l = 0$, car $B_t^0 = t$). Donc

$$\begin{aligned} F(Z_t) = F(Z_s) &+ \sum_{i=1}^d \sum_{k=0}^m \int_s^t \nabla_i F(Z_r) V_k^i(r, Z_r) \mathrm{d} B_r^k \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^m \int_s^t \nabla_{ij}^2 F(Z_t) V_k^i(r, Z_r) V_k^j(r, Z_r) \mathrm{d} r \end{aligned}$$

prenons maintenant l'espérance de cet dernier quantité: l'intégrale stochastique donne zéro et $Z_s = \xi_{ss}(x) = x$ p.s., donc

$$\mathbb{E} F(Z_t) = F(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^m \int_s^t \mathbb{E}[\nabla_{ij}^2 F(Z_t) V_k^i(r, Z_r) V_k^j(r, Z_r)] \mathrm{d} r$$

Pour estimer la quantité a l'intérieur de l'intégrale on note que par hypothèse $|V_k(r, x)| \leqslant M(1 + |x|) \leqslant C_\varepsilon \sqrt{f(x)}$ ou la constante C_ε dépends de ε. Donc

$$|\nabla_{ij}^2 F(Z_t) V_k^i(r, Z_r) V_k^j(r, Z_r)| \leqslant C_\varepsilon F(Z_r)$$

et

$$\mathbb{E} F(Z_t) \leqslant F(x) + C_\varepsilon \int_s^t \mathbb{E} F(Z_r) \mathrm{d} r$$

donc l'on peut conclure par Gronwall et obtenir la première des deux inégalités. Pour la deuxième inégalité on procède de la même manière, mais cet fois on pose $Z_t = \xi_{st}(x) - \xi_{st}(y)$. Le processus Z_t est donc encore une semimartingale et

$$\mathrm{d}Z_t = \sum_{k=0}^{m} [V_k^i(r, \xi_{sr}(x)) - V_k^i(r, \xi_{sr}(y))]\mathrm{d}B_r^k,$$

$$\mathrm{d}\langle Z^i, Z^j\rangle_r = \sum_{k=1}^{m} [V_k^i(r, \xi_{sr}(x)) - V_k^i(r, \xi_{sr}(y))][V_k^j(r, \xi_{sr}(x)) - V_k^j(r, \xi_{sr}(y))]\,\mathrm{d}t$$

cette fois on a que

$$|V_k^i(r, \xi_{sr}(x)) - V_k^i(r, \xi_{sr}(y))| \leqslant M|\xi_{sr}(x) - \xi_{sr}(y)| \leqslant M f(Z_r)^{1/2}$$

indépendemment de ε. Donc avec le même procédé que avant on peut appliquer Gronwall et conclure. $\square$

Exercice 2. Montrer que en effet on a $\mathbb{E}[\sup_{t\in[s,T]}(\varepsilon + |\xi_{st}(x) - \xi_{st}(y)|^2)^p] \leqslant C_{p,T}(\varepsilon + |x-y|^2)^p$.

Corollaire 7. *Pout tout $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t \leqslant T$ on a que presque surement $\xi_{ut}(\xi_{su}(x)) = \xi_{st}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Le lemme 6 et le lemme de Kolmogorov impliquent que pour tout s, t fixés l'application $x \mapsto \xi_{st}(x)$ est presque surement continue (mais l'ensemble aleatoire de continuité depend de s et t). De plus il est facile de voir que on peut choisir la famille de variables aleatoires

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{m} \int_s^t V_k(r, \xi_{sr}(x))\,\mathrm{d}B_r^k$$

continue en x, en fait

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_s^t V_k(r, \xi_{sr}(x))\,\mathrm{d}B_r^k - \int_s^t V_k(r, \xi_{sr}(y))\,\mathrm{d}B_r^k\right]^p \\
&\leqslant C_p \mathbb{E}\left[\int_s^t |V_k(r, \xi_{sr}(x)) - V_k(r, \xi_{sr}(y))|^2\,\mathrm{d}r\right]^{p/2} \\
&\leqslant C_p (t-s)^{p/2-1} \mathbb{E}\left[\int_s^t |V_k(r, \xi_{sr}(x)) - V_k(r, \xi_{sr}(y))|^p\,\mathrm{d}r\right] \quad \text{(par Jensen)} \\
&\leqslant C_p M (t-s)^{p/2-1} \mathbb{E}\left[\int_s^t |\xi_{sr}(x) - \xi_{sr}(y)|^p\,\mathrm{d}r\right] \quad \text{(par hypothése)} \\
&\leqslant C_p (t-s)^{p/2} |x-y|^p \quad \text{(Lemme 6)}
\end{aligned}$$

et donc on peut utiliser encore une fois Kolmogorov pour obtenir une versione continue en x de l'integrale stochastique et montrer que pour $s \leqslant u \leqslant t$ fixés, l'equation integrale

$$\xi_{ut}(x) = x + \sum_{k=0}^{m} \int_u^t V_k(r, \xi_{ur}(x))\,\mathrm{d}B_r^k$$

est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ presque surement. Donc si dans cette equation on remplace x par la fonction aleatoire $\xi_{su}(x)$ on obtiens

$$\xi_{ut}(\xi_{su}(x)) = \xi_{su}(x) + \sum_{k=0}^{m} \int_u^t V_k(r, \xi_{ur}(\xi_{su}(x)))\,\mathrm{d}B_r^k$$

Soit maintenant $\hat{\xi}_{st}(x) = \xi_{ut}(\xi_{su}(x))$ si $t > u$ et $\hat{\xi}_{st}(x) = \xi_{st}(x)$ autrement. Le processus $\hat{\xi}_{st}(x)$ satisfait l'equation

$$\hat{\xi}_{st}(x) = x + \sum_{k=0}^{m} \int_s^t V_k(r, \hat{\xi}_{sr}(x)) \mathrm{d}B_r^k$$

pour tout $t \geqslant s$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ et donc par unicité de la solution on doit avoir que $\xi_{st}(x) = \hat{\xi}_{st}(x)$ p.s. et donc la thése. □

Théorème 8. *Pour tous* $p \geqslant 2$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant s' \leqslant t' \leqslant T$, $x, x' \in \mathbb{R}^d$ *:*

$$\mathbb{E}|\xi_{st}(x) - \xi_{s't'}(x)|^p \leqslant C\{|x - x'|^p + (1 + |x| + |x'|)^p(|t - t'|^{p/2} + |s - s'|^{p/2})\}$$

Démonstration. Pour brevité on considere seulement le cas $0 \leqslant s \leqslant s' \leqslant t \leqslant t' \leqslant T$: par l'EDS e utilisant le Corollaire 7 on a

$$\xi_{s't'}(x') = x' + \sum_{k=0}^{m} \int_{s'}^t V_k(r, \xi_{s'r}(x')) \mathrm{d}B_r^k + \sum_{k=0}^{m} \int_t^{t'} V_k(r, \xi_{s'r}(x')) \mathrm{d}B_r^k$$

$$\xi_{st}(x) = \xi_{ss'}(x) + \sum_{k=0}^{m} \int_{s'}^t V_k(r, \xi_{s'r}(\xi_{ss'}(x))) \mathrm{d}B_r^k$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\xi_{st}(x) - \xi_{s't'}(x)|^p \leqslant\ & (2m+3)^{p-1}\Bigg\{ \underbrace{|\xi_{ss'}(x) - x'|^p}_{\mathcal{A}} \\
& + \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \left| \int_{s'}^t [V_k(r, \xi_{s'r}(x')) - V_k(r, \xi_{s'r}(\xi_{ss'}(x)))] \mathrm{d}B_r^k \right|^p}_{\mathcal{B}} \\
& + \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \left| \int_t^{t'} V_k(r, \xi_{s'r}(x')) \mathrm{d}B_r^k \right|^p}_{\mathcal{C}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

ou on a utilisé l'inegalité (souvent trés utile):$|\sum_{i=1}^N a_i|^p \leqslant N^{p-1} \sum_{i=1}^N |a_i|^p$, qui decoule de l'inegalité de Jensen. On va estimer l'esperance des trois termes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ un par un.

On commence par un petit resultat complementaire:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi_{ss'}(x) - x|^p &\leqslant (m+3)^{p-1} \sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}\left| \int_s^{s'} V_k(r, \xi_{sr}(x)) \mathrm{d}B_r^k \right|^p \\
&\leqslant C_p M \mathbb{E}\left(\int_s^{s'} (1 + |\xi_{sr}(x)|)^2 \,\mathrm{d}r \right)^{p/2} && \text{(par BDG et l'hyp. sur } V_k) \\
&\leqslant C_p (s' - s)^{p/2} (1 + |x|^p) && \text{(par Jensen et le Lemme 6)}
\end{aligned}$$

Avec cette estimation on a facilement que

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}] \leqslant 2^{p-1}\{|x - x'|^p + \mathbb{E}|\xi_{ss'}(x) - x|^p\} \leqslant C_p[|x - x'|^p + (s' - s)^{p/2}(1 + |x|^p)]$$

Par des calculs similaires on peut aussi deduire que

$$\mathbb{E}[\mathcal{B}] \leqslant C_p[|x - x'|^p + (s' - s)^{p/2}(1 + |x|^p)]$$

et

$$\mathbb{E}[\mathcal{C}] \leqslant C_p(t-t')^{p/2}(1+|x'|)^p$$

Tous ces estimations nous permettent de conclure la preuve. □

Remarque 9. Si dans la deuxieme inegalité du Lemma 6 l'on fait tendre $\varepsilon \to 0$ on obtiens par convergence monotone que

$$\mathbb{E}|\xi_{st}(x) - \xi_{st}(y)|^{2p} \leqslant C_{p,T}|x-y|^{2p}$$

donc si on prends $p<0$ on obtiens que si $x \neq y$ alors pur tout t, s on a $\mathbb{P}(\xi_{st}(x) \neq \xi_{st}(y)) = 1$. Il est facile aussi montrer (essayer) que $\mathbb{P}(\inf_{t\in[s,T]}|\xi_{st}(x) - \xi_{st}(y)| > 0) = 1$.

Differentiabilité du flot stochastique

On dit que une fonction defini sur $\mathbb{R}^d$ appartienne a $C^{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ si elle est differentiable est sa derivée est Hölderienne d'index θ. On note $C^{1,\theta}_g(\mathbb{R}^d) \subseteq C^{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonction avec la derivée globalement Hölderienne.

Théorème 10. *On fait l'hypothese que les coefficients V_k soient des fonctions $C^{1,\theta}_g(\mathbb{R}^d)$ en espace, unformement en temps et que les derivées soient bornées. Alors, pour tout $\theta' < \theta$, $x \mapsto \xi_{st}(x)$ est presque surement de classe $C^{1,\theta'}(\mathbb{R}^d)$ unformement en s, t, et la derivée $\nabla\xi_{st}(x)$ satisfait l'equation*

$$\nabla_i \xi^j_{st}(x) = \delta_{ij} + \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=1}^{d}\int_s^t \nabla_l V^i_k(r, \xi_{sr}(x))\nabla_i\xi^l_{st}(x)\mathrm{d}B^k_r \tag{6}$$

pour tout s, t, x p.s.

Démonstration. Soit

$$\eta_{st}(x,y) = \frac{\xi_{st}(x+y) - \xi_{st}(y)}{|y|}$$

Alors une application de la formule de Taylor donne

$$\eta_{st}(x,y) = \frac{y}{|y|} + \int_s^t \underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}\tau \nabla V_k(r, \xi_{sr}(x) + \tau|y|\eta_{sr}(x,y))}_{\mathcal{V}_{sr}(x,y)}\eta_{sr}(x,y)\mathrm{d}B^k_r.$$

On veut montrer que $\eta_{st}(x,y)$ est une fonction continue de s, t, x, y pour tout $y \neq 0$ et donc que la limite $y \to 0$ existe et que $\nabla_i\xi_{st}(x) = \lim_{\rho\to 0}\eta_{st}(x, \rho e_i)$ est une fonction Hölderienne de x, s, t. Tout cela va decouler de l'estimation suivante:

$$\mathbb{E}|\eta_{st}(x,y) - \eta_{s't'}(x',y')|^p \leqslant C_p\{|x-x'|^{\alpha p} + |y-y'|^{\alpha p} + (1+|x|^{\alpha p} + |x'|^{\alpha p})[|t-t'|^{\alpha p/2} + |s-s'|^{\alpha p/2}]\} \tag{7}$$

On va montrer (7) par etapes, comment dans le resultat de continuité. Dabord la bornitude de $\eta_{st}(x,y)$ dans L^p:

$$\mathbb{E}|\eta_{st}(x,y)|^p \leqslant C_p\left[1 + |t-s|^{p/2-1}\sup_{z,u,k}|\nabla V_k(u,z)|^p\int_s^t \mathbb{E}|\eta_{sr}(x,y)|^p\mathrm{d}u\right] \tag{8}$$

et par Gronwall on a que $\mathbb{E}|\eta_{st}(x,y)|^p \leqslant C_p e^{C_p T^{p/2}}$ pour tout $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Considerons maintenant le cas $t = t'$ et $s \leqslant s' \leqslant t'$

$$\eta_{st}(x,y) - \eta_{s't'}(x',y') = \underbrace{\int_s^{s'} \mathcal{V}_{sr}(x,y)\eta_{sr}(x,y)\,\mathrm{d}B_r}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\int_{s'}^{t} [\mathcal{V}_{sr}(x,y)\eta_{sr}(x,y) - \mathcal{V}_{s'r}(x',y')\eta_{s'r}(x',y')]\mathrm{d}B_r}_{\mathcal{B}}$$

et on a

$$\mathbb{E}[|\mathcal{A}|^p] \leqslant C_p |s-s'|^{p/2-1} \int_s^{s'} \mathbb{E}|\eta_{sr}(x,y)|^p\,\mathrm{d}r \leqslant C_p |s-s'|^{p/2}.$$

L'integrand de $\mathcal{B}$ est estimé par

$$|\mathcal{V}_{sr}(x,y) - \mathcal{V}_{s'r}(x',y')|\,|\eta_{sr}(x,y)| + |\mathcal{V}_{s'r}(x',y')|\,|\eta_{sr}(x,y) - \eta_{s'r}(x',y')|$$

$$\leqslant C\|\nabla V\|_\infty |\eta_{sr}(x,y) - \eta_{s'r}(x',y')|$$

$$+ C(|\xi_{sr}(x) - \xi_{s'r}(x')|^\alpha + |\xi_{sr}(x+y) - \xi_{s'r}(x'+y')|^\alpha)|\eta_{s'r}(x',y')|$$

et donc on peut contrôler $\mathbb{E}[|\mathcal{B}|^p]$ par

$$C[(1+|x|^{\alpha p} + |x'|^{\alpha p})|s-s'|^{\alpha p/2} + |x-x'|^{\alpha p} + |y-y'|^{\alpha p}] + C\int_{s'}^t \mathbb{E}|\eta_{sr}(x,y) - \eta_{s'r}(x',y')|^p \mathrm{d}r$$

et appliquant Gronwall à l'inegalité integrale

$$\mathbb{E}|\eta_{st}(x,y) - \eta_{s't'}(x',y')|^p \leqslant \mathcal{D} + C\int_{s'}^t \mathbb{E}|\eta_{sr}(x,y) - \eta_{s'r}(x',y')|^p \mathrm{d}r$$

ou $\mathcal{D} = C'[(1+|x|^{\alpha p} + |x'|^{\alpha p})|s-s'|^{\alpha p/2} + |x-x'|^{\alpha p} + |y-y'|^{\alpha p}]$, on obtiens l'eq. (7).

Il nous reste de controler le cas $t < t'$ (les autre cas peuvent etre traite de façon similaire). On a

$$\eta_{st}(x,y) - \eta_{s't'}(x',y') = \eta_{st}(x,y) - \eta_{s't}(x',y') + \int_t^{t'} \mathcal{V}_{s'r}(x',y')\,\eta_{s'r}(x',y')\,\mathrm{d}B_r$$

et grace à la borne (8) l'integrale stochastique peut etre controle en norme L^p par $C|t-t'|^{1/2}$ et donc conclure facilement. □

Remarque 11. Si l'on fait l'hypothése que $V_k \in C_g^{n,\theta}$ alors par les mêmes methodes on peut obtein que $\xi_{st} \in C^{n,\theta'}$ pour tout $\theta' < \theta$.

Théorème 12. *La matrice Jacobienne $\nabla \xi_{st}(x)$ n'est pas singuliere pour tout s, t, x (toujours presque surement).*

Démonstration. Pour le Theoreme 10 $\nabla\xi$ satisfait l'eq. integrale (6). On considere alors l'equation suivante pour le processus $t \mapsto K_{st}(x)$ a valeurs dans le matrices $d \times d$

$$d_t K_{st}(x) = -K_{st}(x)\nabla V_k(\xi_{st}(x))\,\mathrm{d}B_t^k - K_{st}(x)\nabla V_k(\xi_{st}(x))\nabla V_k(\xi_{st}(x))\,\mathrm{d}t$$

avec condition initiale $K_{ss}(x) = I_{d\times d}$. Il est facile de voir que cette equation ci admet une unique solution globale en temps qui est continue en s, t, x si $V \in C_g^{1,\alpha}$. La formule de Itô alors donne que

$$d_t[K_{st}(x)\,\nabla\xi_{st}(x)] = [d_t K_{st}(x)]\nabla\xi_{st}(x) + K_{st}(x)\,[d_t\nabla\xi_{st}(x)] + d_t\langle K_{s\cdot}(x), \nabla\xi_{s\cdot}(x)\rangle = 0$$

et donc que $K_{st}(x)\,\nabla\xi_{st}(x) = K_{ss}(x)\,\nabla\xi_{ss}(x) = I_{d\times d}$ pour tout $t \geqslant s$ et x qui montre que la matrice $\nabla\xi_{st}(x)$ n'est pas singuliere et que $[\nabla\xi_{st}(x)]^{-1} = K_{st}(x)$. □

Integrales retrogrades

On a dejà vu que le flot ξ dirigé par B et V_k satisfait la formule d'Itô

$$F(\xi_{st}(x)) = F(x) + \sum_{k=0}^{m} \int_s^t \mathcal{V}_k(r) F(\xi_{sr}(x))\, \mathrm{d}B_r^k + \int_s^t \mathcal{L}(r) F(\xi_{sr}(x)) \mathrm{d}r$$

où

$$\mathcal{V}_k(r) F(x) = \sum_{i=1}^{d} V_k^i(r,x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}, \qquad \mathcal{L}(r) F(x) = \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{k=1}^{m} V_k^i(r,x) V_k^j(r,x) \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Théorème 13. *Si $V_k \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ et $F \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ alors*

$$F(\xi_{st}(x)) - F(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_s^t \mathcal{V}_k(r) (F \circ \xi_{rt})(x) \hat{\mathrm{d}} B_r^k + \int_s^t \mathcal{L}(r) (F \circ \xi_{rt})(x) \mathrm{d}r.$$

Démonstration. On se donne une partition $\Delta = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t\}$ de $[0,t]$ et l'on fait l'hypothése que $s = s_\ell$ pour un quelque $0 \leqslant \ell \leqslant n$. Alors

$$F(\xi_{st}(x)) - F(x) = \sum_{k=\ell}^{n-1} [(F \circ \xi_{s_{k+1} t})(\xi_{s_k s_{k+1}}(x)) - (F \circ \xi_{s_{k+1} t})(x)] \tag{9}$$

un developpement en série de Taylor donne

$$= \sum_{k=\ell}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \nabla_i (F \circ \xi_{s_{k+1} t})(x) [\xi_{s_k s_{k+1}}^i(x) - x_i] + \sum_{i,j=1}^{d} \nabla_{ij}^2 (F \circ \xi_{s_{k+1} t})(x + \eta_k) [\xi_{s_k s_{k+1}}^i(x) - x_i][\xi_{s_k s_{k+1}}^j(x) - x_j] \right\}$$

où les η_k sont des variables aleatoires sur $\mathbb{R}^d$ tel que $|\eta_k| \leqslant |\xi_{s_k s_{k+1}}(x) - x|$. On montrerà les convergences suivantes

$$\mathcal{A}^\Delta = \sum_{k=\ell}^{n-1} \sum_{i=1}^{d} \nabla_i (F \circ \xi_{s_{k+1} t})(x) [\xi_{s_k s_{k+1}}^i(x) - x_i] \to \sum_{j=0}^{m} \int_s^t \mathcal{V}_j(r) (F \circ \xi_{rt})(x) \hat{\mathrm{d}} B_r^j$$

$$\mathcal{B}^\Delta = \sum_{k=\ell}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{d} \nabla_{ij}^2 (F \circ \xi_{s_{k+1} t})(x) [\xi_{s_k s_{k+1}}^i(x) - x_i][\xi_{s_k s_{k+1}}^j(x) - x_j] \to \int_s^t \mathcal{L}(r) (F \circ \xi_{rt})(x) \mathrm{d}r$$

et que

$$\mathcal{C}^\Delta = \sum_{k=\ell}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{d} [\nabla_{ij}^2 (F \circ \xi_{s_{k+1} t})(x + \eta_k) - \nabla_{ij}^2 (F \circ \xi_{s_{k+1} t})(x)] [\xi_{s_k s_{k+1}}^i(x) - x_i][\xi_{s_k s_{k+1}}^j(x) - x_j] \to 0$$

quand la taille $|\Delta|$ de la partition Δ va à zero. C'est plus que suffisante pour demontrer l'eq.(9).

On a que

$$\mathcal{A}^\Delta = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=\ell}^{n-1} \sum_{i=1}^{d} \nabla_i (F \circ \xi_{s_{k+1} t})(x) \int_{s_k}^{s_{k+1}} V_j^i(r, \xi_{s_k r}(x))\, \mathrm{d}B_r^j = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{d} \mathcal{A}_{ij}^\Delta$$

Pour $r \in [0,t]$ et $j \geqslant 1$ soit I_r^Δ le processus

$$I_r^\Delta = \mathbb{E}\big[\,\mathcal{A}_{ij}^\Delta|\mathcal{F}_{rt}\big]$$

qui est une martingale retrograde continue à carré integrable. Soit maintenant M_r^Δ un autre martingale retrograde continue et à carré integrable definie par

$$M_r^\Delta = \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{A}}_{ij}^\Delta|\mathcal{F}_{rt}]$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ij}^\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} \nabla_i (F \circ \xi_{s_{k+1}\,t})(x) V_j^i(r,x)(B_{s_{k+1}}^j - B_{s_k}^j)$$

Un calcul directe montre que la variation quadratique de $I^\Delta - M^\Delta$ associé à la partition Δ est donné par

$$\langle I^\Delta - M^\Delta\rangle_t^\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} |\nabla_i (F \circ \xi_{s_{k+1}\,t})(x)| \bigg(\int_{s_k}^{s_{k+1}} [V_j^i(r, \xi_{s_k\,r}(x)) - V_j^i(r,x)] \,\mathrm{d}\, B_r^j\bigg)^2$$

que converge à zero dans L^1 quand $|\Delta| \to 0$. Donc $I_r^\Delta - M_r^\Delta$ converge à zero uniformement dans L^2. Mais $M_r^\Delta \to M_r$ où

$$M_r = \int_r^t \nabla_i (F \circ \xi_{rt})(x) V_j^i(r,x) \hat{\mathrm{d}}\, B_r^j.$$

Est facile de montrer la convergence des terms avec $j=0$.

Soit

$$J_r^{\Delta,v} = \mathbb{E}\Bigg[\sum_{k=\ell}^{n-1} \nabla_{ij}^2 (F \circ \xi_{s_{k+1}\,t})(x) \int_{s_k}^{s_{k+1}} V_v^i(r, \xi_{s_k\,r}(x)) \,\mathrm{d}\, B_r^v \Bigg| \mathcal{F}_{rt}\Bigg]$$

et

$$K_r^{\Delta,v} = \mathbb{E}\Bigg[\sum_{k=\ell}^{n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} V_v^j(r, \xi_{s_k\,r}(x)) \,\mathrm{d}\, B_r^v \Bigg| \mathcal{F}_{rt}\Bigg]$$

alors $\mathcal{B}^\Delta = \sum_{v=1}^m [\langle J^{\Delta,v}, K^{\Delta,v}\rangle_t^\Delta - \langle J^{\Delta,v}, K^{\Delta,v}\rangle_s^\Delta]$. Est facile de voir que $J^{\Delta,v}$ et $K^{\Delta,v}$ convergent à J_r^v et K_r^v respectivement, où

$$J_r^v = \int_r^t \nabla_{ij}^2 (F \circ \xi_{rt})(x) V_v^i(r,x) \hat{\mathrm{d}}\, B_r^v$$

$$K_r^v = \int_r^t V_v^j(r,x) \hat{\mathrm{d}}\, B_r^v$$

on va montrer que $\langle J^{\Delta,v}, K^{\Delta,v}\rangle_t^\Delta \to \langle J^v, K^v\rangle_t$ qui donne la convergence que l'on cherche. On a que

$$|\langle J^{\Delta,v}, K^{\Delta,v}\rangle_t^\Delta - \langle J^v, K^v\rangle_t| \leqslant |\langle J^{\Delta,v}, K^{\Delta,v}\rangle_t^\Delta - \langle J^v, K^v\rangle_t^\Delta| + |\langle J^v, K^v\rangle_t^\Delta - \langle J^v, K^v\rangle_t|$$

et est clair que le deuxieme terme converge à zero. Pour le premiere on utilise que

$$|\langle J^{\Delta,v}, K^{\Delta,v}\rangle_t^\Delta - \langle J^v, K^v\rangle_t^\Delta| \leqslant (\langle J^{\Delta,v} - J^v\rangle_t^\Delta \langle K^{\Delta,v}\rangle_t^\Delta)^{1/2} + (\langle K^{\Delta,v} - K^v\rangle_t^\Delta \langle J^{\Delta,v}\rangle_t^\Delta)^{1/2}$$

mais si on utilise le fait que $|J_t^{\Delta,v} - J_t^v|^2 - \langle J^{\Delta,v} - J^v\rangle_t^\Delta$ est une martingale continue on a

$$\mathbb{E} \sup_t \langle J^{\Delta,v} - J^v\rangle_t^\Delta \leqslant 17\,\mathbb{E}|J_t^{\Delta,v} - J_t^v|^2 \to 0.$$

De plus on a

$$|\mathcal{C}^\Delta| \leqslant \sup_k \left| \nabla_{ij}^2 (F \circ \xi_{s_{k+1}\,t})(x + \eta_k) - \nabla_{ij}^2 (F \circ \xi_{s_{k+1}\,t})(x) \{\langle K^\Delta(i)\rangle_t^\Delta \langle K^\Delta(j)\rangle_t^\Delta\}^{1/2} \to 0\right.$$

et on peut conclure la preuve. $\square$