Rappels sur les processus et sur les temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 1}$ une filtration (c-à-d une famille croissante des sous-tribus de $\mathcal{A}$). La filtration détermine ce qu'on sait et ce qu'on n sait pas à un instant de temps donné: tout événement $A \in \mathcal{F}_n$ est déterminé au temps n. Un processus $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est dit adapté ssi $X_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est prévisible si X_1 est constante et $X_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ pour tout $n > 1$. Il est intégrable si $X_n \in L^1(\Omega)$ pour tout n. Il est une martingale (sur/sous) si il est intégrable et $X_n = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ ($\geqslant, \leqslant$) pour tout $n \geqslant 1$.

L'espérance conditionnelle d'une v.a. F intégrable par rapport à une tribu $\mathcal{G}$ est une v.a. intégrable $\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ telle que $\mathbb{E}[GF] = \mathbb{E}[G\,\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]]$ pour tout v.a. bornée F qui est $\mathcal{G}$–mesurable.

Un temps d'arrêt T est une v.a. $T: \Omega \to \mathbb{N}$ telle que les événements $\{T = k\}$ sont $\mathcal{F}_k$–mesurables pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette condition équivaut à demander que $\{T \leqslant k\} \in \mathcal{F}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quelques propriétés des temps d'arrêt: $\{T > k\} \in \mathcal{F}_k$, $\{T \geqslant k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$, si T, S sont t.a. alors $T \wedge S = \min(T, S)$ et $T \wedge S = \max(T, S)$ sont t.a. ($(T \wedge S)(\omega) = \min(T(\omega), S(\omega))$).

La tribu $\mathcal{F}_T$ engendrée par le temps d'arrêt T est la plus petite tribu qui contient les événements $A \in \mathcal{A}$ tels que $\{T \leqslant k\} \cap A \in \mathcal{F}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, i.e.

$$\mathcal{F}_T = \sigma(A \in \mathcal{A}: \{T \leqslant k\} \cap A : k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{F}_k)$$

Une fonction G est $\mathcal{F}_T$–mesurable ssi $G\mathbb{I}_{\{T=k\}}$ est $\mathcal{F}_k$–mesurable pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est une caractérisation équivalente des fonctions $\mathcal{F}_T$–mesurables. Pour le prouver on note que il est vrai pour les fonction caractéristiques $G = \mathbb{I}_B$ où $B \in \mathcal{F}_T$ et que on peut approcher n'importe quelle fonction $\mathcal{F}_T$ mesurable par des combinaison linéaires des fonctions caractéristiques. Si on note $G_k = G\mathbb{I}_{\{T=k\}}$ alors on a que $(G_k)_{k \geqslant 1}$ est un processus adapté et que $G = G_T$. Donc toute fonction $G \in \mathcal{F}_T$ peut être écrite comme la valeur au temps T d'un processus adapté $(G_k)_{k \geqslant 1}$.

Si $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est un processus adapté alors le processus arrêté en T: $\tilde{X}_n = X_{n \wedge T}$ est adapté et X_T est $\mathcal{F}_T$–mesurable. Si $(M_n)_{n \geqslant 1}$ est une martingale alors $(\tilde{M}_n)_{n \geqslant 1}$ est une martingale. Si S, T sont deux t.a. alors on dit que $S \leqslant T$ si $S(\omega) \leqslant T(\omega)$ presque sûrement.

Si S, T sont deux t.a. tels que $S \leqslant T$ alors $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$. Preuve: La tribu $\mathcal{F}_S$ est engendrée par les événements $A \in \mathcal{A}$ tels que $\{S \leqslant k\} \cap A \in \mathcal{F}_k$. Mais alors si $A \in \mathcal{F}_S$ on a que $\{T \leqslant k\} \cap A = \{S \leqslant T \leqslant k\} \cap A = \{T \leqslant k\} \cap (\{S \leqslant k\} \cap A) \in \mathcal{F}_k$ car $\{T \leqslant k\} \in \mathcal{F}_k$ et $\{S \leqslant k\} \cap A \in \mathcal{F}_k$ par hypothèse. Donc tous les générateurs A de $\mathcal{F}_S$ sont aussi générateurs de $\mathcal{F}_T$ et donc $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Lemme 1. *Si les t.a. sont bornées et $(M_n)_{n \geqslant 1}$ est une martingale, alors*

$$\mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S] = M_S. \tag{1}$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $S \leqslant T \leqslant N$ par l'hypothèse de borninude des t.a. On montre d'abord que $\mathbb{E}[M_N | \mathcal{F}_T] = M_T$. Par la définition d'espérance conditionnelle on doit montrer que $\mathbb{E}[M_N\, G] = \mathbb{E}[M_T\, G]$ pour toute fonction bornée G qui est $\mathcal{F}_T$–mesurable. On a que $G\mathbb{I}_{\{T=n\}} \in \mathcal{F}_n$ et que

$$\mathbb{E}[M_N G] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[M_N G\mathbb{I}_{\{T=n\}}] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_N | \mathcal{F}_n] G\mathbb{I}_{\{T=n\}}]$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[M_n G\mathbb{I}_{\{T=n\}}] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[M_T G\mathbb{I}_{\{T=n\}}] = \mathbb{E}[M_T G].$$

Maintenant on a que $\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S]=\mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_S]=M_S$ car $\mathcal{F}_S\subseteq\mathcal{F}_T$. □

Remarque 2. Une propriétés analogues sont vraie pour les sous/sur–martingales. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une sous-martingale, alors il existe toujours une martingale $(M_n)_{n\geqslant 1}$ et un processus prévisible croissante $(A_n)_{n\geqslant 1}$ (i.e. $A_n\in\mathcal{F}_{n-1}$ et $A_{n+1}\geqslant A_n$) tels que $X_n=M_n+A_n$. En effet si M doit être une martingale on a que

$$X_n-A_n=M_n=\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[X_{n+1}-A_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]-A_{n+1}$$

et donc il suffit définir A par $A_1=0$ et $A_{n+1}-A_n=\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]-X_n\geqslant 0$ pour tout $n>1$. Alors si X est une sous-martingales avec décomposition $X_n=M_n+A_n$ on a que

$$\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]=\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S]+\mathbb{E}[A_T|\mathcal{F}_S]=M_S+\mathbb{E}[A_T|\mathcal{F}_S]\geqslant M_S+\mathbb{E}[A_S|\mathcal{F}_S]=M_S+A_S=X_S$$

car $A_T\geqslant A_S$ par la croissance de $(A_n)_{n\geqslant 1}$ et le fait que $T\geqslant S$.

Remarque 3. Si F est une v.a. intégrable alors $F_n=\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n]$ est une martingale. Donc le lemme précèdent donne que $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_S]=F_S$ pour tout t.a. bornée S. Donc on peut calculer l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{F}_S$ en prenant la valeur au temps $n=S$ de l'espérance conditionnelle calculé par rapport à $\mathcal{F}_n$.

Arrêt optimal en horizon fini

On considère un processus adapté $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ et on se pose le problème d'optimiser la valeur $\mathbb{E}[Y_T]$ parmi tous les temps d'arrêt T (pour la filtration $\mathcal{F}$). L'interprétation est que $Y_n(\omega)$ est le gain qu'on obtient si on décide de s'arrêter au temps n et qu'on cherche à optimiser le gain moyen attendu en fonction de la règle d'arrêt que on se donne (que est la seule chose raisonnable au temps initial, i.e. sans connaître au préalable l'évolution du système). On retient seulement les règles d'arrêt $T\colon\Omega\to\mathbb{R}$ qui sont telles que $\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$, c-à-d pour lesquelles on sait dire si il faut s'arrêter au temps n seulement en fonction de l'histoire observée jusqu'à ce moment-là.

On considère d'abord le problème en horizon fini, i.e. on se donne $N\in\mathbb{N}$ fixé, on appelle $\mathcal{T}_N$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés par N et on optimise parmi tous les t.a. $T\in\mathcal{T}_N$. Soit $J_N=\sup_{T\in\mathcal{T}_N}\mathbb{E}[Y_T]$ le gain moyen optimal. On appelle $T^\star\leqslant N$ temps d'arrêt optimal si $\mathbb{E}[Y_{T^\star}]=J_N$.

Notation: L'infimum tronqué $\inf_N\, A$ pour un ensemble $A\subseteq\mathbb{R}$ est donné par $\inf_N A=\inf A$ si $A\neq\emptyset$ et $\inf_N\emptyset=N$.

La solution du problème d'arrêt optimal (comme de la plus part des problèmes d'optimisation) passe par la détermination d'une *fonction valeur* Z_n associé aux différent choix qui sont encore disponibles au temps n. La fonction valeur représente le gain sur lequel on peut espérer en fonction de tous l'information que j'ai accumulé jusqu'au temps n, i.e. de $\mathcal{F}_n$. Elle doit satisfaire les propriétés suivantes:

- $Z_n\in\mathcal{F}_n$: elle est un processus adapté. On doit être capable de la déterminer seulement en fonction des informations disponibles au temps n.

- $Z_n\geqslant Y_n$: au temps n ce que j'espère gagner ne peut pas être inférieur à ce que je peux gagner en m'arrêtant tout de suite à n.

- $Z_n\geqslant\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$: ma position a une valeur qui n'est pas inférieure à ce que j'espère gagner en moyenne à l'étape suivante (étant donné que je connais déjà $\mathcal{F}_n$) .

En effet à chaque étape j'ai deux choix (m'arrêter ou continuer) sauf au temps final N où je dois forcement m'arrêter et donc gagner Y_N. On défini donc la fonction valeur par

$$Z_N = Y_N, \qquad Z_n = \sup\,(Y_n, \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \quad \text{pour } 1 \leqslant n < N \tag{2}$$

Elle est une sur-martingale qui majore Y. En effet on va montrer qu'elle est l'*enveloppe de Snell* de Y, i.e. la plus petite sur-martingale Q tel que $Q_n \geqslant Y_n$ pour tout $0 \leqslant n \leqslant N$.

Théorème 4. *Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ un processus adapté tel que $\mathbb{E}|Y_n| < \infty$pour tout $n \geqslant 1$. On défini Z_n par l'eq. (2) et un t.a. $T^\star = \inf\{k \leqslant N: Y_k = Z_k\}$. Alors la suite $(Z_{n\wedge T^\star})_{n\geqslant 1}$ est une martingale et*

$$\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_{T^\star}] = \mathbb{E}[Y_{T^\star}] = J_N.$$

Le t.a. $T^\star$ est optimal et Z est l'enveloppe de Snell de Y.

Remarque 5. On utilisera souvent des écritures du genre $T^\star = \inf\{k \leqslant N: Y_k = Z_k\}$ pour définir des temps d'arrêt. Ils sont abrégées pour $T^\star(\omega) = \inf\{k \leqslant N: Y_k(\omega) = Z_k(\omega)\}$. Exercice: montrer que il s'agit bien d'un temps d'arrêt.

Démonstration. Par définition $Z_n \geqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ et $Z_n \geqslant Y_n$. Sur l'événement $\{T^\star \geqslant n\}$ on a $Z_n = \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ donc le processus $\tilde{Z}_n := Z_{n\wedge T^\star}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. En effet $\mathbb{E}[1_A Z_{(n+1)\wedge T^\star}] = \mathbb{E}[1_A Z_{n\wedge T^\star}]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_n$. Donc si on considère les deux temps d'arrêt $n \wedge T^\star$ et $T^\star$ on a $n \wedge T^\star \leqslant T^\star$ et $\mathbb{E}[\tilde{Z}_{T^\star}|\mathcal{F}_{n\wedge T^\star}] = \tilde{Z}_{n\wedge T^\star}$ qui équivaut à dire $\mathbb{E}[Z_{T^\star}|\mathcal{F}_{n\wedge T^\star}] = Z_{n\wedge T^\star}$. En prenant l'espérance on a, pour tout t.a. $T \leqslant N$:

$$\mathbb{E}[Y_T] \leqslant_{(1)} \mathbb{E}[Z_T] \leqslant_{(2)} \mathbb{E}[Z_1] =_{(3)} \mathbb{E}[Z_{T^\star}] =_{(4)} \mathbb{E}[Y_{T^\star}]$$

où l'inégalité (1) est donne par la propriété que $Y_n \leqslant Z_n$ pour tout n et donc pour tout t.a. $T \leqslant N$, l'inégalité (2) est la propriété de sur-martingale de Z_n par rapport au t.a. T, l'égalité (3) est donne par la propriété de martingale du processus arrêté $\tilde{Z}_n$ et enfin l'égalité (4) est du au fait que $Y_{T^\star} = Z_{T^\star}$ par définition de $T^\star$. Cela étant vrai pour n'importe quelle t.a. $T \leqslant N$ on a que $\mathbb{E}[Y_{T^\star}] = J_N$ et donc que $T^\star$ est un t.a. optimal pour Y. Le gain optimal est donné par $J_N = \mathbb{E}[Z_1]$. On va montrer que Z est l'enveloppe de Snell de Y: en effet soit Q un autre sur-martingale qui domine Y: au temps final on a $Q_N \geqslant Y_N = Z_N$. De plus si on a $Q_n \geqslant Z_n$ pour tout $N \geqslant n > k$ alors $Q_k \geqslant \mathbb{E}[Q_{k+1}|\mathcal{F}_k] \geqslant \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]$ et $Q_k \geqslant Y_k$, donc on a aussi $Q_k \geqslant Z_k$ et on a établi la domination aussi a l'instant k. Par induction (rétrograde) on a domination à tout temps $1 \leqslant k \leqslant N$ et donc Z est effectivement la plus petite des sur-martingales qui dominent Y. On peut conclure que le gain optimal est donné par l'espérance en 1 de l'enveloppe de Snell de Y. $\square$

Corollaire 6. *Le t.a. $T^\star$ est le plus petit t.a. optimal: si S est un autre t.a. optimal alors $T^\star \leqslant S$ presque sûrement.*

Démonstration. Supposons que $\mathbb{P}(T^\star > S) > 0$. Alors pour $\omega \in \Omega$ tel que $T^\star(\omega) > S(\omega)$ on a que $Y_S(\omega) < Z_S(\omega)$ car $T^\star(\omega)$ est le premier k ou on a l'égalité $Y_k(\omega) = Z_k(\omega)$. Comme l'événement $\{T^\star > S\}$ a une probabilité positive on obtient que $\mathbb{E}[Y_S] < \mathbb{E}[Z_S]$ strictement. Mais par la propriété de sur-martingale de Z on en déduit que $\mathbb{E}[Y_S] < \mathbb{E}[Z_S] \leqslant \mathbb{E}[Z_1] = J_N$ et cela est en contradiction avec l'hypothèse que S est optimal (i.e. $\mathbb{E}[Y_S] = \sup_T \mathbb{E}[Y_T] = J_N$). $\square$

Remarque 7. Si F est une v.a. positive ($\geqslant 0$) et l'événement $\{F > 0\}$ a probabilité strictement positive, alors $\mathbb{E}[F] > 0$. En effet si $\mathbb{P}(F > 0) > 0$ alors $\mathbb{P}(F \geqslant \varepsilon) > 0$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (pourquoi?). Et donc $\mathbb{E}[F] \geqslant \mathbb{E}[F\,\mathbb{I}_{F\geqslant\varepsilon}] \geqslant \mathbb{E}[\varepsilon\,\mathbb{I}_{F\geqslant\varepsilon}] \geqslant \varepsilon\,\mathbb{P}(F \geqslant \varepsilon) > 0$.

Remarque 8. On observe qu'une définition équivalente de $T^\star$ est

$$T^\star = \inf\{k \leqslant N : Y_k \geqslant \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}$$

Corollaire 9. *Le temps d'arrêt* $T^\sharp = \inf\{k \leqslant N : Y_k > \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}$ *est le plus grand temps d'arrêt optimal: si* S *est un t.a. optimal alors* $S \leqslant T^\sharp$ *p.s..*

Démonstration. Supposons que $\mathbb{P}(T^\sharp < S) > 0$. On remarque que $\tilde{Z}_n = Z_{n \wedge (T^\sharp + 1)}$ est une martingale (en effet si $n \leqslant T^\sharp$ alors $Y_n \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ et donc $Z_n = \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$). D'une part on a que $\mathbb{E}[\tilde{Z}_S|\mathcal{F}_S] = \tilde{Z}_S$ par la martingalité de $\tilde{Z}$. On remarque aussi que $\{T^\sharp \geqslant S\} \in \mathcal{F}_S$ et donc que

$$Y_S \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S} \leqslant Z_S \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S} = \tilde{Z}_S \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S} = \mathbb{E}[\tilde{Z}_{T^\sharp} \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S}|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[Z_{T^\sharp} \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S}|\mathcal{F}_S]. \tag{3}$$

D'autre part, si on pose $Z_{N+1} = Z_N$ alors $(Z_n)_{n=1,\ldots,N+1}$ est encore une sur-martingale et donc on a que $\mathbb{E}[Z_{S \vee (T^\sharp+1)}|\mathcal{F}_{T^\sharp+1}] \leqslant Z_{T^\sharp+1}$ (inégalité de sur-martingale avec les deux t.a. $T^\sharp + 1 \leqslant S \vee (T^\sharp + 1) \leqslant N + 1$). Pour le fait que $\{T^\sharp < S\} \in \mathcal{F}_{T^\sharp}$ et que $Y_S \leqslant Z_S$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_S \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] &\leqslant \mathbb{E}[Z_S \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] = \mathbb{E}[Z_{S \vee (T^\sharp+1)} \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{S \vee (T^\sharp+1)}|\mathcal{F}_{T^\sharp+1}] \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] \\ &\leqslant \mathbb{E}[Z_{T^\sharp+1} \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{T^\sharp+1}|\mathcal{F}_{T^\sharp}] \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] < \mathbb{E}[Y_{T^\sharp} \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] \leqslant \mathbb{E}[Z_{T^\sharp} \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] \end{aligned} \tag{4}$$

où on a utilisé aussi le fait que par la définition de $T^\sharp$ on a $Y_{T^\sharp} > \mathbb{E}[Z_{T^\sharp+1}|\mathcal{F}_{T^\sharp}]$. L'eq. (3) et l'eq. (4) donnent que

$$\mathbb{E}[Y_S] = \mathbb{E}[Y_S \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S}] + \mathbb{E}[Y_S \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] < \mathbb{E}[Z_{T^\sharp} \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S}] + \mathbb{E}[Z_{T^\sharp} \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] = \mathbb{E}[Z_{T^\sharp}] = \mathbb{E}[Y_{T^\sharp}]$$

qui est en contradiction avec l'hypothèse d'optimalité de S. □

Remarque 10. Il sera utile de donner une preuve détaillé du fait que $Y_{T^\sharp} > \mathbb{E}[Z_{T^\sharp+1}|\mathcal{F}_{T^\sharp}]$. Commencer par montrer que si F est une v.a. intégrable et T est un t.a. alors $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_T]\mathbb{I}_{T=n} = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_{T=n} = \mathbb{E}[F \mathbb{I}_{T=n}|\mathcal{F}_n]$. De suite écrire $Y_{T^\sharp} = \sum_{n=1}^N Y_n \mathbb{I}_{T^\sharp=n}$ et conclure.

Le problème de Moser

Il s'agit du problème d'arrêt optimal suivant. Soient $X_1, \ldots, X_N$ des v.a. iid positives avec fonction de répartition F et moyenne $\mathbb{E}[X_i]$ finie. On imagine connaître la loi F. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = X_n$: on observe en séquence N réalisations indépendantes de F, notre gain est la dernière valeur observée avant de s'arrêter. L'horizon est N: si nous ne nous arrêtons pas avant N on est obligé d'accepter le gain $Y_N = X_N$.

Imaginons un cas particulier de ce problème. Soit $N = 3$ et les X_1, X_2, X_3 des v.a. iid $\mathcal{U}([0, 1])$. On peut prendre $\Omega = [0, 1]^3$, on note $\omega = (\omega_1, \omega_2, w_3) \in [0, 1]^3$ les points de Ω. Les v.a.s X_n et Y_n sont données par $Y_n(\omega) = X_n(\omega) = \omega_n$ pour $n = 1, 2, 3$. La filtration $\mathcal{F}$ est engendrée par les X_n: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Donc par exemple une v.a. $F : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_2$-mesurable est exprimable comme une fonction de X_1 et X_2, et donc il existe $\varphi : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ tel que $F(\omega) = \varphi(X_1(\omega), X_2(\omega)) = \varphi(\omega_1, \omega_2)$.

Considérons la stratégie donné par le temps d'arrêt $S : \Omega \to \{1, 2, 3\}$ défini par

$$S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, \omega_1 \geqslant 1/2 \\ 2 & \text{si}\, \omega_1 < 1/2 \,\text{et}\, \omega_2 \geqslant 1/2 \\ 3 & \text{si}\, \omega_1 < 1/2 \,\text{et}\, \omega_2 < 1/2 \end{cases}$$

Est facile de voir que S est un temps d'arrêt par la filtration $\mathcal{F}$ (il faut vérifier que $\{S=k\}\in\mathcal{F}_k$ pour $k=1,2,3$). Le gain qu'on obtient avec cette stratégie est $[Y_S](\omega)=Y_{S(\omega)}(\omega)$, donc

$$Y_S(\omega)=\begin{cases}\omega_1 & \text{si}\,\omega_1\geqslant 1/2\\ \omega_2 & \text{si}\,\omega_1<1/2\,\text{et}\,\omega_2\geqslant 1/2\\ \omega_3 & \text{si}\,\omega_1<1/2\,\text{et}\,\omega_2<1/2\end{cases}$$

Son espérance mathématique $\mathbb{E}[Y_S]$ représente notre gain moyen dans une série répété de jeux en utilisant chaque fois la stratégie S. On peut la calculer, le vecteur ω à une densité uniforme sur le cube Ω:

$$\mathbb{E}[Y_S]=\int_\Omega Y_S(\omega)f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\omega_3=\frac{11}{16}\simeq 0.6875.$$

Calculons la fonction valeur de ce problème pour déterminer la valeur maximale de $\mathbb{E}[Y_T]$ quand T varie parmi tous les temps d'arrêt à valeurs dans $\{1,2,3\}$. Par définition $Z_3(\omega)=X_3(\omega)=\omega_3$. Donc Z_3 est $\sigma(X_3)$ mesurable. Ensuite $Z_2(\omega)=\sup(Y_2(\omega),\mathbb{E}(Z_3|X_1,X_2)(\omega))$, or si $f(x|\omega_1\omega_2)$ est la densité conditionnelle de X_3 sachant X_1,X_2 alors

$$\mathbb{E}(Z_3|X_1,X_2)(\omega)=\int_{[0,1]} Z_3(\omega')f(\omega_3'|\omega_1\omega_2)d\omega_3'=\int_{[0,1]}\omega_3'f(\omega_3'|\omega_1\omega_2)d\omega_3'=\int_{[0,1]}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}=\mathbb{E}[Z_3]$$

car les v.a.s X_1, X_2, X_3 sont indépendantes. Donc on voit que l'espérance conditionnelle est constante et donc que $\mathbb{E}(Z_3|X_1,\,X_2)=\mathbb{E}[Z_3]$. C'est une conséquence directe du fait que $Z_3\in\sigma(X_3)$ et de l'indépendance. Donc $Z_2(\omega)=\sup\,(\omega_2,\,\mathbb{E}[Z_3])$ qui est $\sigma(X_2)$ mesurable ce qui par indépendance donne encore une fois que $\mathbb{E}[Z_2|\mathcal{F}_1]=\mathbb{E}[Z_2]$ et que $Z_1(\omega)=\sup\,(\omega_1,\mathbb{E}[Z_2])$. Calculons

$$\mathbb{E}[Z_2]=\mathbb{E}[\sup\,(X_2,1/2)]=\int_0^1\sup\,(x,1/2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\mathrm{d}x+\int_{1/2}^1 x\mathrm{d}x=\frac{5}{8}\simeq 0.625$$

et finalement $\mathbb{E}[Z_1]=\mathbb{E}[\sup\,(X_1,5/8)\simeq 0.695$ qui nous donne l'information qu'il existe un temps d'arrêt T tel que $\mathbb{E}[Y_T]>0.6875$ qui est un gain moyen meilleur du gain qu'on a obtenu avec la règle S. L'existence de ce temps d'arrêt est dû au fait que $0.695=\mathbb{E}[Z_1]=\sup_T\,[Y_T]>\mathbb{E}[Y_S]$. Le théorème nous donne aussi un temps d'arrêt optimal $T^\star$ qui réalise le gain optimal, c-à-d tel que $\mathbb{E}[Y_{T^\star}]\simeq 0.695$. Ce temps d'arrêt est donné par le premier instant $n\leqslant N$ où $Y_n\geqslant\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ dans notre cas on a que $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[Z_{n+1}]$ et donc on a que

$$T^\star(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si}\,Y_1(\omega)\geqslant\mathbb{E}[Z_2]\\ 2 & \text{si}\,Y_1(\omega)<\mathbb{E}[Z_2]\,\text{et}\,Y_2(\omega)\geqslant\mathbb{E}[Z_1]\\ 3 & \text{autrement}\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si}\,\omega_1\geqslant 5/8\\ 2 & \text{si}\,\omega_1<5/8\,\text{et}\,\omega_2\geqslant 1/2\\ 3 & \text{autrement}\end{cases}$$

et par un calcul explicite on peut confirmer que $\mathbb{E}[Y_{T^\star}]=0.695$.

Solution général du problème de Moser

Pour déterminer la règle d'arrêt optimal on observe qu'à cause du fait que $Y_n\in\sigma(X_n)$ on a que la fonction valeur Z_n est aussi $\sigma(X_n)$ mesurable. Démonstration par récurrence (rétrograde): c'est vrai pour $n=N$, en effet $Z_N=Y_N\in\sigma(X_N)$. Supposons qu'il est vrai pour tout $k\geqslant n+1$ et démontrons qu'il est aussi vrai pour $k=n$. De la définition de Z_n on a que $Z_n=\sup\,(Y_n,\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n])$. Par indépendance des $(X_i)_i$ et par le fait qu'on suppose que $Z_{n+1}\in\sigma(X_{n+1})$ on a que $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[Z_{n+1}]$. Donc $Z_n=\sup\,(Y_n,\mathbb{E}[Z_{n+1}])\in\sigma(Y_n)=\sigma(X_n)$, ce qui permet de conclure. Donc $Z_n=\sup\,(X_n,\mathbb{E}[Z_{n+1}])$ pour tout $1\leqslant n<N$ et $Z_N=X_N$. En utilisant l'identité $\max\,(\alpha,\beta)=\beta+(\alpha-\beta)_+$ on a que

$$\mathbb{E}[Z_n]=\mathbb{E}[\sup\,(Y_n,\mathbb{E}[Z_{n+1}])=\varphi(\mathbb{E}[Z_{n+1}])$$

où $\varphi(x) = \mathbb{E}[\sup (x, X_1)] = x + \mathbb{E}[(X_1 - x)_+]$ est une fonction positive, croissante et telle que $\varphi(x) - x$ est décroissante et $\varphi(x) - x \to 0$ quand $x \to \infty$ car $\mathbb{E}[(X_1 - x)_+] \leqslant \mathbb{E}[\mathbb{I}_{X_1 > x} X_1] \to 0$ par le théorème de convergence dominée: $\mathbb{I}_{X_1 > x} X_1 \leqslant X_1$, X_1 est intégrable et $\lim_{x \to \infty} \mathbb{I}_{X_1(\omega) > x} = 0$ pour tout ω. Si l'on défini $V_1 = \mathbb{E}[X_1]$ et $V_n = \varphi(V_{n-1})$ pour $1 < n \leqslant N$ alors $\mathbb{E}[Z_N] = \mathbb{E}[X_N] = V_1$ et $\mathbb{E}[Z_n] = V_{N-n+1}$ qui est une fonction décroissante de n. Donc le gain optimal est $J_N = \mathbb{E}[Z_1] = V_N$ et la règle d'arrêt optimal est donnée par

$$T^\star = \inf \{k \leqslant N : X_k \geqslant \mathbb{E}[Z_{k+1}]\} = \inf \{k \leqslant N : X_k \geqslant V_{N-k}\}$$

Il faut donc s'arrêter dès que l'on observe une valeur de X_k supérieure au seuil V_{N-k} (qui est décroissant). La stratégie optimale demande au début d'avoir des grandes observations pour s'arrêter, mais au fur et à mesure que le temps passe le seuil d'arrêt baisse pour approcher la moyenne de X_1.

Exemple 11. Considérons le problème de Moser avec des $X_i \sim \mathcal{U}([0, 1])$. On a $\mathbb{E}[X_1] = 1/2$ et

$$\mathbb{E}[(X - x)_+] = \int_0^1 (u - x)_+ \mathrm{d}u = \int_x^1 (u - x) \mathrm{d}u = \frac{1 - x^2}{2} - x(1 - x) = \frac{1 + x^2}{2} - x$$

donc $\varphi(x) = (x^2 + 1)/2$. Un calcul direct donne $V_1 = 1/2$, $V_2 = 0.625$, $V_3 = 0.695$, $V_4 = 0.742$, $V_5 = 0.775$, $V_6 = 0.8004$, $V_7 = 0.820$, $V_8 = 0.836$, $V_9 = 0.850$, $V_{10} = 0.861$...

Par exemple: si $N = 3$ on retrouve la stratégie optimale qu'on a déjà vu. Si $N = 6$ la stratégie optimale donnée par $T^\star$ est de s'arrêter au temps 1 si $X_1 \geqslant \mathbb{E}[Z_2] = V_5 = 0.775$, s'arrêter au temps 2 si $X_2 \geqslant V_4 = 0.742$, s'arrêter au temps 3 si $X_3 \geqslant V_3 = 0.695$, s'arrêter au temps 4 si $X_2 \geqslant V_2 = 0.625$, s'arrêter au temps 5 si $X_5 \geqslant V_1 = 1/2$ ou s'arrêter à 6.

Le problème de la princesse

Il s'agit de choisir parmi N objet le meilleur. On a le droit d'inspecter un objet à la fois et de décider de le choisir et donc s'arrêter ou de passer à l'inspection du suivant. Ce n'est pas possible de revenir sur ses propres pas: chaque fois on ne peut seulement garder que le dernier objet ou continuer. On veut déterminer une stratégie d'arrêt qui nous permet de maximiser la probabilité de choisir l'objet qui est le meilleur parmi les N à notre disposition. Ce problème porte le nom de « problème de la princesse » où, dans la littérature anglo-saxonne, problème classique de la secrétaire (CSP - classic secretary problem).

Le modèle mathématique est basé sur un espace d'états Ω donné par les possible permutations des N objets: $\omega \in \Omega$ est un vecteur $\omega \in \{1, ..., N\}^N$ tel que $\omega(i) \neq \omega(j)$ si $i \neq j$ pour tout $i, j = 1, ..., N$. Sur Ω on considère la distribution uniforme qui donne le même poids $1/N!$ à chaque permutation. La valeur $\omega(i)$ est le rang absolu de l'n-ème objet inspecté, donc si $\omega(i) = 1$ le meilleur objet se trouve dans la position i. On remarque qu'on ne peut pas observer directement les ω (on ne connaît pas le classement des objets jusqu'a ce qu'on ai inspecté tous les N objets). A chaque pas n on observe une variable $X_n(\omega)$ qui donne le rang *relatif* de l'n-ème objet inspecté par rapport à tous les $n - 1$ objets inspectés auparavant. Donc $X_1 = 1$, $X_2 \in \{1, 2\}$,..., $X_n \in \{1, ..., n\}$ et $X_N(\omega) = \omega(N)$: une fois que j'ai inspecté tous les objets je connais leur classement absolu. A chaque instant n je connais $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ la tribu engendrée par le rangs relatifs des premiers n objets. Exemple: si $N = 4$ et $\omega = (3, 4, 1, 2)$ alors $X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 2, X_3(\omega) = 1$, $X_4(\omega) = 2$.

Lemme 12. *Pour tout $n \leqslant N$ on a que $\mathbb{P}(X_n = j) = 1/n$ pour $j = 1, ..., n$ et les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.*

Démonstration. Soit $\Xi = \{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{N}^N \colon 1 \leqslant x_k \leqslant k,\, k = 1, ..., N\}$ l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_N)$. On remarque que la taille de Ξ est $N!$. On commence par montrer que pour tout $(x_1, ..., x_N) \in \Xi$ on a

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N) = 1/N!$$

En effet l'application $X \colon \Omega \to \Xi$ que envoie chaque possible permutation des N objet vers la correspondante suite des rangs relatifs est bijective, i.e. existe $\Psi \colon \Xi \to \Omega$ telle que $\Psi(X(\omega)) = \omega$. Ce qu'il est équivalent à dire que donné la suite des rangs relatifs $x_1, ..., x_N$ on peut reconstruire le valeurs de $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$. Donc $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\Psi(X) = \Psi(x)) = \mathbb{P}(\omega = \Psi(x)) = 1/N!$ car ω est uniforme sur Ω et $\mathrm{Card}(\Omega) = N!$. Maintenant on a aussi

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{x_1=1}^{1} \sum_{x_2=1}^{2} \cdots \sum_{x_{n-1}=1}^{n-1} \sum_{x_{n+1}=1}^{n+1} \cdots \sum_{x_N=1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N) = \frac{1}{n}$$

et donc $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_N = x_N)$ qui montre l'indépendance. $\square$

L'objectif est de trouver une stratégie d'arrêt (donné par un t.a.) qui nous permet de optimiser la probabilité de choisir l'objet meilleur parmi les N disponibles. Autrement dit on veut maximiser $\mathbb{P}(\omega(T) = 1) = \mathbb{E}[1_{\omega(T)=1}]$ pour tout T t.a. de la filtration $\mathcal{F}$ et borné par N. Ce critère ne rentre pas dans le cadre que nous avons tracé car les v.a.s $1_{\omega(k)=1}$ ne sont pas $\mathcal{F}_k$ mesurables. Cela est lié au fait qu'on connaîtra les rangs absolus des N objets qu'au temps N mais à ce point il sera trop tard pour choisir autre chose que le dernier des objets...

On doit d'abord récrire notre critère à optimiser dans la forme d'une espérance d'une v.a. $\mathcal{F}_T$ mesurable:

$$\mathbb{E}[1_{\omega(T)=1}] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[1_{\omega(T)=1} \cdot 1_{T=k}] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[1_{\omega(k)=1} \cdot 1_{T=k}] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{E}[1_{\omega(k)=1} | \mathcal{F}_k] \cdot 1_{T=k}]$$

où on a utilisé le fait que $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k$ par définition de t.a. et les propriétés de l'espérance conditionnelle. Si l'on défini un processus adapté Y par $Y_k = \mathbb{E}[1_{\omega(k)=1} | \mathcal{F}_k] \in \mathcal{F}_k$, l'on a

$$\mathbb{E}[1_{\omega(T)=1}] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[Y_k \cdot 1_{T=k}] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[Y_T \cdot 1_{T=k}] = \mathbb{E}[Y_T]$$

et $Y_T \in \mathcal{F}_T$: le critère adapté qui nous cherchions. On est donc dans le cadre du théorème précédent: horizon fini N, fonction de gain $Y_n \in [0, 1]$ et donc intégrable pour tout $0 \leqslant n \leqslant N$. La solution du problème d'optimisation est donné par $T^\star = \inf\{k \leqslant N \colon Y_k = Z_k\}$ où Z est l'enveloppe de Snell de Y. Il nous reste donc à calculer cette fonction valeur et expliciter le temps d'arrêt $T^\star$ comme fonction de $X_1, ..., X_{T^\star}$ (qui sont les quantités qu'on observe pratiquement).

On commence par expliciter le critère $Y_n = \mathbb{P}(\omega(n) = 1 | \mathcal{F}_n)$. On remarque que l'événement $\{\omega(n) = 1\}$ est équivalent à $\{X_n = 1, X_{n+1} \neq 1, ..., X_N \neq 1\}$ et par l'indépendance des $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant N}$:

$$Y_n = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} \neq 1, ..., X_N \neq 1 | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_n = 1 | \mathcal{F}_n) \mathbb{P}(X_{n+1} \neq 1) \cdots \mathbb{P}(X_N \neq 1)$$

$$= 1_{X_n=1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \cdots \cdot \frac{N-1}{N} = 1_{X_n=1} \frac{n}{N}.$$

donc $Y_n \in \sigma(X_n)$. Cette propriété entraîne que Z_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$: en effet $Z_N = Y_N = 1_{X_N=1} \in \sigma(X_N)$, $Z_{N-1} = \sup(Y_{N-1}, \mathbb{E}(Z_N|\mathcal{F}_{N-1})) \in \sigma(X_{N-1})$ et par induction on obtient $Z_n \in \sigma(X_n)$ donc, par indépendance des X on a bien que $Z_{n+1} \in \sigma(X_{n+1}) \perp \mathcal{F}_n$. Cela implique qu'on a $Z_n = \sup(Y_n, \mathbb{E}(Z_{n+1}))$ et qui

$$T^\star = \inf\{k \leqslant N : \mathbb{E}(Z_{k+1}) \leqslant Y_k\} = \inf\{k \leqslant N : \mathbb{E}(Z_{k+1}) \leqslant k/N, X_k = 1\}$$

en effet on a toujours $\mathbb{E}(Z_n) \geqslant \mathbb{E}(Z_N) = \mathbb{P}(X_N = 1) = 1/N > 0$ par la propriété de sur-martingale de Z. L'espérance de Z_n est donc décroissante en n et la stratégie est d'attendre que $\mathbb{E}(Z_{k+1})$ tombe au dessous du seuil k/N et après de s'arrêter sur le premier objet meilleur de tous les autres vus auparavant. En effet si on appelle r le premier entier $\leqslant N$ tel que $\mathbb{E}(Z_{r+1}) \leqslant r/N$, on a que $\mathbb{E}(Z_k) \geqslant \mathbb{E}(Z_r) > (r-1)/N > k/N$ pour tout $k < r$ et que $\mathbb{E}(Z_k) \leqslant \mathbb{E}(Z_{r+1}) \leqslant r/N \leqslant k/N$ pour tout $k \geqslant r$:

$$T^\star = \inf\{k \in [r, N] : X_k = 1\} =: T_r$$

la stratégie optimale est donnée par le temps d'arrêt T_r: attendre le premier instant k après r où on observe $X_k = 1$.

Ayant établi que la règle optimale est de la forme T_r il nous reste à déterminer $r \in [1, N]$ de façon telle que $\mathbb{E}[Y_{T_r}]$ soit maximale. Cela est équivalent a maximiser $\mathbb{P}(\omega(T_r) = 1)$ (car en effet on a déjà montre que pour tout t.a. $\mathbb{P}(\omega(T) = 1) = \mathbb{E}[Y_T]$). Or

$$\mathbb{P}(\omega(T_r) = 1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(\omega(T_r) = 1, T_r = k) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(\omega(k) = 1, T_r = k)$$

$$= \sum_{k=r}^{N} \mathbb{P}(X_r \neq 1, \ldots, X_{k-1} \neq 1, X_k = 1, X_{k+1} \neq 1, \ldots, X_N \neq 1)$$

$$= \sum_{k=r}^{N} \mathbb{P}(X_r \neq 1) \cdots \mathbb{P}(X_{k-1} \neq 1) \mathbb{P}(X_k = 1) \mathbb{P}(X_{k+1} \neq 1) \cdots \mathbb{P}(X_N \neq 1)$$

où on a utilise le fait que $\{\omega(k) = 1, T_r = k\} = \{X_r \neq 1, \ldots, X_{k-1} \neq 1, X_k = 1, X_{k+1} \neq 1, \ldots, X_N \neq 1\}$ et l'indépendance des X_k. Donc

$$G_r = \mathbb{P}(\omega(T_r) = 1) = \sum_{k=r}^{N} \frac{r-1}{r} \cdots \frac{k-2}{k-1} \frac{1}{k} \frac{k}{k+1} \cdots \frac{N-1}{N} = \frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^{N} \frac{1}{k-1}$$

est le gain moyen de la stratégie T_r pour tout $r \in [1, N]$. La stratégie optimale est donc donné par le $r \in [1, N]$ qui maximise la fonction G_r. Si l'on note r_* la valeur optimale on peut facilement calculer la table suivante

n	1	2	3	4	5	6	7	8
r_*	1	1	2	2	3	3	3	4
G_{r_*}	1.0	0.5	0.5	0.458	0.433	0.428	0.414	0.41

Dans la limite où $N \to \infty$ et $r/N = x \in (0, 1)$ on a

$$G_r = \frac{Nx-1}{N} \sum_{k=Nx}^{N} \frac{1}{k-1} \simeq x \int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = -x \log x$$

cette fonction a un maximum pour $\log x = -1$ et donc pour $x = 1/e \simeq 0.368$. La valeur asymptotique de G_{Nx} est aussi $\simeq 0.368$. La stratégie optimale est donc de laisser défiler les premiers $r \simeq N/e$ objets et après de choisir le premier qu'on trouve le meilleur. De cette façon on a une probabilité de $\simeq 36.8\%$ de tomber sur l'objet de rang maximal.

Le problème du stationnement

Ce problème est du à MacQueen et Miller (1960). On conduit une voiture sur une voie infinie à la recherche d'une place de stationnement mais les places ne sont pas forcement toujours libres. L'objectif c'est de se garer le plus près possible du théâtre sans pouvoir revenir en arrière. On voit une place libre à distance d du théâtre. Est-que on doit s'y garer?

On imagine un modèle discret. On part de l'origine et on voit des places de stationnement à tout points entiers de la droite réelle. Soient $X_0, X_1, \ldots$ des Bernoulli iid de paramètre $p \in]0,1[$ telles que $X_n = 1$ signifie que l'n-ème place est déjà occupée et $X_n = 0$ signifie qu'elle est libre. Soit N la position du théâtre. On peut s'arrêter à la place n ssi $X_n = 0$ et si on décide de s'arrêter la on perd la quantité $|n - N|$. Quand on est à n on ne peut pas voir si la place $n+1$ est libre et si on passe outre on ne peut plus revenir en arrière. Si on arrive à la place N et si elle n'est pas libre alors on va prendre la première place libre qui on trouve en continuant, dans ce cas la perte attendue est donnée par $(1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + \cdots = 1/(1-p)$. On peut donc considérer un problème d'arrêt optimal en horizon fini N avec fonction de perte Y donné par

$$Y_n = (+\infty)\, \mathbb{I}_{X_n=1} + |N-n|\, \mathbb{I}_{X_n=0} \quad \text{pour } n = 0, \ldots, N-1 \quad \text{et} \quad Y_N = \mathbb{I}_{X_N=1}(1-p)^{-1}$$

et filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ pour $n = 0, \ldots, N$.

On a que $Y_n \in \sigma(X_n)$ et que les X_n sont indépendantes, donc on sait que $Z_n \in \sigma(X_n)$ et que $Z_n = \inf(Y_n, \mathbb{E}[Z_{n+1}])$, la fonction valeur Z_n est cette fois ici une sous-martingale et un temps d'arrêt optimal est

$$T^\star = \inf\{n \leqslant N : Y_n \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}]\} = \inf\{n \leqslant N : X_n = 0, N - n \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}]\}.$$

On observe que

$$Z_n = \begin{cases} \inf(N-n, \mathbb{E}[Z_{n+1}]) & \text{si } X_n = 0 \\ \mathbb{E}[Z_{n+1}] & \text{si } X_n = 1 \end{cases}$$

et donc $\mathbb{E}[Z_n] = (1-p)\inf(N-n, \mathbb{E}[Z_{n+1}]) + p\mathbb{E}[Z_{n+1}]$. Soit $V_n = \mathbb{E}[Z_{N-n}]$, alors $V_0 = p/(1-p)$ et $V_n = (1-p)\inf(n, V_{n-1}) + pV_{n-1} \leqslant V_{n-1}$. La fonction V_n est de croissante, de plus on a que $V_N = \mathbb{E}[Z_0] = J_N$ le coût optimal. Soit $n_\star$ le premier instant où $V_n < n$. Alors pour $n < n_\star$ on a $V_n \geqslant n$ et donc $V_{n-1} \geqslant n$ et $V_n = (1-p)n + p\, V_{n-1}$. Pour $n \geqslant n_\star$ par contre on a que $V_n < n$ et donc que $V_n = V_{n-1} = V_{n_\star}$: la fonction V_n est constante après $n_\star$. Conséquence: $V_N = V_{n_\star}$. D'autre par on peut vérifier que $V_n = n + (2p^n - 1)p/(1-p)$ pour $n \leqslant n_\star$. Cela donne que $n_\star$ est la plus petite valeur de n tel que $p^{n+1} < 1/2$ (car, rappelons-nous, $n_\star$ a été défini comme le plus petit n tel que $V_n < n$). On a aussi que

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] - (N-n) = V_{N-n-1} - (N-n) = -1 + p\,\frac{2p^{N-n-1} - 1}{1-p} = \frac{2p^{N-n} - 1}{1-p}$$

et donc la condition $N - n \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}]$ est équivalente à demander que $p^{N-n} \geqslant 1/2$ et le t.a. optimal $T^\star$ s'écrit $T^\star = \inf\{n \in [N - n_\star, N] : X_n = 0\}$.

Par exemple si $p = .9$ alors $n_* = 6$ et donc il faut commencer à chercher à se garer à partir de 6 places avant le théâtre.

Remarque 13. Une solution alternative à la dernière partie est la suivante. La fonction $N - n$ est décroissante en n et la fonction $\mathbb{E}[Z_{n+1}]$ est croissante donc il existe un temps critique r qui est le premier temps tel que $N - r \leqslant \mathbb{E}[Z_{r+1}]$: $r = \inf\{n \leqslant N \colon N - n \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}]\}$ et on peut exprimer $T^\star = T_r := \inf\{n \in [r, N] \colon X_n = 0\}$: on commence à chercher de la place r et on se gare dès qu'on trouve une place libre. Il faut maintenant déterminer r de sorte que $C(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}]$ soit minimale. Il est clair que $C(N) = p(1-p)^{-1}$. On veut montrer que $C(r) = p\,C(r+1) + (1-p)(N-r)$. En effet

$$C(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}] = \mathbb{E}[Y_{T_r}\mathbb{I}_{T_r = r}] + \mathbb{E}[Y_{T_r}\mathbb{I}_{T_r > r}] = \mathbb{E}[Y_r \mathbb{I}_{X_r = 0}] + \mathbb{E}[Y_{T_{r+1}}\mathbb{I}_{X_r = 1}]$$

en effet $\{T_r > 1\} = \{X_r = 1\}$, $\{T_r = r\} = \{X_r = 0\}$ et si $X_r = 1$ alors $T_r = T_{r+1}$. Donc

$$C(r) = p\,C(r+1) + (N-r)(1-p).$$

Il est plus facile de considérer $D(n) = C(N-n)$ qui vérifie $D_0 = p/(1-p)$ et $D(n) = p\,D(n-1) + n\,(1-p)$. Donc $D(n+1) - D(n) = (1-p)(n+1-D(n))$. Soit $Q(n) = D(n) - n - 1$ alors $Q(n+1) = p\,Q(n) - 1$. Par induction on peut montrer que

$$Q(n) = \frac{p^{n+1}}{1-p} - \sum_{k=0}^{n} p^{n-k} = \frac{p^{n+1}}{1-p} - \frac{1-p^{n+1}}{1-p} = \frac{2\,p^{n+1} - 1}{1-p}$$

et donc $D(n+1) - D(n) = (1 - 2p^{n+1})$. Pour n tel que $p^{n+1} > 1/2$ la fonction $D(n)$ est localement décroissante et pour n tel que $p^{n+1} < 1/2$ elle est localement croissante et atteint son minimum pour le plus petit $n_* \geqslant 0$ tel que $p^{n_*+1} < 1/2$. Cela entraîne que $C(r)$ a un minimum pour $r_* = N - n_*$. Le coût minimale est donc

$$C(r_*) = D(n_*) = n_* + 1 + \frac{2p^{n_*+1} - 1}{1-p}.$$

Une variante du problème de la secrétaire

On reprend le problème de la secrétaire (ou de la princesse) avec une différente fonction de gain. On se donne la possibilité de ne rien choisir dans quel cas notre gain serait nul, par contre si on choisit l'objet meilleur notre gain serait 1 et si on choisit un objet qui se révèle n'être pas le meilleur alors on comptabilise un gain négatif égal à -1. On considère des stratégies T données par des t.a. à valeurs dans l'ensemble $1, \ldots, N+1$. Le cas $T = N+1$ signifie que l'on ne va rien choisir et donc le gain associé est 0. Si T est un t.a. le gain moyen $G(T)$ qui lui est associé est donné par $G(T) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\omega(T)=1, T \leqslant N} - \mathbb{I}_{\omega(T) \neq 1, T \leqslant N}]$. Notre objectif est de trouver une règle d'arrêt qui maximise $G(T)$.

Première étape: écrire $G(T)$ dans la forme $\mathbb{E}[Y_T]$ où Y est un processus adapté. A cette fin on observe que l'on a

$$G(T) = \mathbb{P}(\omega(T) = 1) - \mathbb{P}(\omega(T) \neq 1, T \leqslant N) = \mathbb{P}(\omega(T) = 1) - 1 + \mathbb{P}(\omega(T) = 1 \text{ ou } T = N+1)$$

$$= 2\mathbb{P}(\omega(T) = 1) - 1 + \mathbb{P}(T = N+1) = 2\,\mathbb{P}(\omega(T) = 1) - \mathbb{P}(T \leqslant N) = \mathbb{E}[2\,\mathbb{I}_{\omega(T)=1} - \mathbb{I}_{T \leqslant N}]$$

donc on gagné 2 si on choisit l'objet meilleur mais on comptabilise un coût de 1 dans le cas ou on décide de choisir un des objets (au lieu de rien choisir). On rappelle que on a déjà obtenu la formule

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\omega(T)=1}] = \mathbb{E}[\frac{T}{N}\mathbb{I}_{X_T = 1}]$$

valide pour tout temps d'arrêt T. Donc on a que $G(T) = \mathbb{E}[Y_T]$ ou Y est le processus adapté donné par

$$Y_n = \begin{cases} 2\,\frac{n}{N}\mathbb{I}_{X_n=1} - 1 & \text{pour } 1 \leqslant n \leqslant N \\ 0 & \text{pour } n = N+1. \end{cases}$$

On rappelle que les X_n sont des v.a. indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_n = k) = 1/n$ pour $k = 1, \ldots, n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. La structure du problème n'est pas différente en cela du problème originaire, seulement la fonction de gain est différente. Donc on a que $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1}]$ et que la règle optimale est de la forme $T_r = \inf\{n \in [r, N+1] \colon X_n = 1\}$. Calculons le gain $G_N(r) = G(T_r)$:

$$G_N(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}] = \sum_{k=r}^{N} \mathbb{E}[Y_k\,\mathbb{I}_{T_r=k}] = \sum_{k=r}^{N} \left(\frac{2k}{N} - 1\right)\mathbb{P}(X_k = 1, X_r = \cdots = X_{k-1} \neq 1)$$

$$= \sum_{k=r}^{N} \frac{2k}{N}\,\mathbb{P}(X_k = 1, X_r = \cdots = X_{k-1} \neq 1) - \sum_{k=r}^{N} \mathbb{P}(X_k = 1, X_r = \cdots = X_{k-1} \neq 1)$$

$$= \sum_{k=r}^{N} \frac{2}{N}\,\frac{r-1}{r}\,\frac{r}{r+1} \cdots \frac{k-2}{k-1} - \sum_{k=r}^{N} \mathbb{P}(\omega(k) = 1)$$

$$= 2\frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^{N} \frac{1}{k-1} - \mathbb{P}(\exists k \geqslant r \colon \omega(k) = 1)$$

$$= 2\,\frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^{N} \frac{1}{k-1} - \frac{N-r+1}{N}$$

Dans la limite $N \to \infty$ avec $x = r/N$ fixe on obtient que

$$G_N(Nx) \simeq 2x\log x - (1-x) = 2x\log x + x - 1$$

qui est maximale pour $\log x = -1/2$.

Problèmes monotones

Définition 14. *On défini la règle d'anticipation à une étape (1-step lookahead rule ou 1-sla) pour le problème avec horizon N en étant donnée par le temps d'arrêt*

$$T_{\text{1sla}} = \inf_N \{n < N \colon Y_n \geqslant \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}.$$

Autrement dit la règle 1-sla demande de s'arrêter à n si n est le premier temps où le gain Y_n est supérieur ou égale au gain moyen qu'on peut réaliser en s'arrêtant à la prochaine étape. On s'arrête à N si $Y_n < \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n \in [1, N-1]$.

Lemme 15. *On a que $T_{\text{1sla}} \leqslant T^\star$ et donc par le Corollaire 6 que $T_{\text{1sla}} \leqslant \hat{T}$ pour tout t.a. optimal $\hat{T}$.*

Démonstration. Pour tout $n < N$ on a que $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Alors $Y_n < \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n < T_{\text{1sla}}$ ce que implique que $T_{\text{1sla}} \leqslant T^\star$. □

Le lemme dit que si la règle 1-sla demande de continuer alors il est optimale de le faire (car n'importe quelle règle d'arrêt optimale demande aussi de continuer).

Définition 16. *Le problème d'arrêt est dit monotone ssi* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_{N-1}$ *presque sûrement où* A_k *est l'événement* $A_n = \{Y_n \geqslant \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\} \in \mathcal{F}_n$.

Théorème 17. *La règle 1-sla est optimale pour tout problème monotone d'horizon fini.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $T_{1\mathrm{sla}} = T^\star$. On sait déjà que $T_{1\mathrm{sla}} \leqslant T^\star$. Pour conclure il nous reste à établir que $T_{1\mathrm{sla}} \geqslant T^\star$ p.s.. Sur l'événement $\{T_{1\mathrm{sla}} = k\}$ on a que A_k est vérifie. En conséquence, pour la monotonie du problème, on a que tout A_n pour $k \leqslant n \leqslant N-1$ sont vérifies. Mais cela entraîne que

$$A_{N-1} \Longrightarrow Y_{N-1} \geqslant \mathbb{E}[Y_N|\mathcal{F}_{N-1}] = \mathbb{E}[Z_N|\mathcal{F}_{N-1}] \Longrightarrow Z_{N-1} = Y_{N-1}$$

par A_{N-2} on a que $Y_{N-2} \geqslant \mathbb{E}[Y_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2}] = \mathbb{E}[Z_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2}] \Rightarrow Z_{N-2} = Y_{N-2}$ et aussi de suite jusqu'au prouver que $Y_k = Z_k$ et donc que $T^\star \leqslant k = T_{1\mathrm{sla}}$ car $T^\star$ est le premier temps n où l'égalité $Y_n = Z_n$ est vérifié. Donc on a montré que nécessairement $T^\star \leqslant T_{1\mathrm{sla}}$ et donc que $T^\star = T_{1\mathrm{sla}}$. □

Problèmes avec structure markovienne

Dans cette section on considère des problèmes d'arrêt optimal (horizon fini) pour lesquels le processus des gains Y est une fonction connue d'une chaîne de Markov X pour la filtration $\mathcal{F}$. On montre que pour cette classe de problèmes la fonction valeur Z a une forme simple.

On rappelle qu'un processus de Markov X pour la filtration $\mathcal{F}$ et à valeurs dans l'espace dénombrable $\mathcal{S}$ est un processus adapté $(X_n)_{n=1,2,\ldots}$ tel que $X_n : \Omega \to \mathcal{S}$ et que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x|X_n) = P_n(X_n, x) \qquad \forall x \in \mathcal{S}, n \geqslant 1$$

où P_n est le noyau de transition du processus de Markov au temps n $P_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x)$ qui vérifie $\sum_{y\in\mathcal{S}} P_n(x, y) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \geqslant 1$. Si $P_n(x, y) = P(x, y)$ indépendamment de n on dit que le processus de Markov est homogène. P_n est aussi appelé matrice de transition.

Exemple 18. Dans le problème de la princesse la suite $(X_n)_{n=1,\ldots,N}$ est un processus de Markov avec espace d'états $\mathcal{S} = \{1, \ldots, N\}$ et noyau de transition donné par

$$P_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y) = \frac{1}{n+1}\mathbb{I}_{1 \leqslant y \leqslant n+1}$$

par indépendance des X_n. On remarque que ce n'est par un processus homogène en temps.

Exemple 19. Dans le problème de Moser si on fait l'hypothèse que la loi des X_n est à valeurs dans l'espace dénombrable $\mathcal{S}$ on a que les X_n constituent un processus de Markov avec matrice de transition homogène $P(x, y) = \pi(y)$ où $\pi(y) = \mathbb{P}(X_1 = y)$.

Soit X un processus de Markov pour la filtration $\mathcal{F}$ et le processus des gains soit de la forme $Y_n = \varphi_n(X_n)$ pour une famille de fonctions $\{\varphi_n \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R} \colon n = 1, \ldots, N\}$. Considérons le problème d'arrêt optimal associé. Par induction on montre que $Z_n \in \sigma(X_n)$ i.e. qu'il existent des fonctions $V_n \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ telles que $Z_n = V_n(X_n)$. En effet $Z_N = Y_N = \varphi_N(X_N) \in \sigma(X_N)$ donc on peut prendre $V_N(x) = \varphi_N(x)$. Si on suppose que $Z_{n+1} = V_{n+1}(X_{n+1}) \in \sigma(X_{n+1})$ alors on a que $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|X_n]$ par la propriété de Markov et donc que $Z_n = \sup\,(Y_n, \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = \sup\,(\varphi_n(X_n), \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|X_n]) = V_n(X_n)$ pour une fonction V_n. Cela conclut l'argument d'induction.

En utilisant la matrice de transition on peut écrire que

$$\mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|X_n] = \sum_{y \in \mathcal{S}} V_{n+1}(y) P_n(X_n, y) = P_n V_{n+1}(X_n)$$

où on a utilisé la notation $P\psi(x) = \sum_{y \in \mathcal{S}} P(x, y)\psi(y)$.

Les fonctions V_n sont données par l'itération suivante:

$$V_N(x) = \varphi_N(x) \qquad \text{et} \qquad V_n(x) = \sup\,(\varphi_n(x), P_n V_{n+1}(x))\text{ pour } 1 \leqslant n < N.$$

La règle d'arrêt $T^\star$ devient $T^\star = \inf\,\{n \leqslant N\colon \varphi_n(X_n) = V_n(X_n)\} = \inf\,\{n \leqslant N\colon \varphi_n(X_n) \geqslant P_n V_{n+1}(X_n)\}$. Donc si on défini les ensembles $\mathcal{D}_n = \{x \in \mathcal{S}\colon \varphi_n(x) = V_n(x)\} = \{x \in \mathcal{S}\colon \varphi_n(x) \geqslant P_n V_{n+1}(x)\}$ on a que $T^\star = \inf\,\{n \leqslant N\colon X_n \in \mathcal{D}_n\}$: le premier temps où X_n entre dans le domaine $\mathcal{D}_n$ (qui change lui aussi avec le temps).

Supposons que la suite X soit donnée par des v.a. indépendantes. Dans ce cas la matrice de transition est $P_n(x, y) = \pi_n(y)$ où $\pi_n(y) = \mathbb{P}(X_n = y)$ est la loi de X_n. On voit que $P_n\psi(x)$ ne dépend pas de x et $P_n\psi(x) = \sum_{y \in \mathcal{S}} \psi(y)\pi_n(y) = \mathbb{E}[\psi(X_n)]$. La fonction valeur est $V_n(x) = \sup\,(\varphi_n(x), \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})])$. Si on note $c_n = \mathbb{E}[V_n(X_n)]$ alors

$$c_N = \mathbb{E}[\varphi_N(X_N)], \qquad c_n = \mathbb{E}[\sup\,(\varphi_n(X_n), c_{n+1})]$$

et $T^\star = \inf\,\{n \leqslant N\colon \varphi_n(X_n) > c_{n+1}\}$. Le problème de la détermination de la fonction valeur est donc ramené au calcul des constantes c_n qui dépendent seulement des φ_n et des lois des X_n. Le gain moyen optimal est donné par $c_1 = \mathbb{E}[Z_1]$.