Controle des chaines de Markov 2008/2009. En vue de l'examen finale.

Probleme d'arret pour une somme actualisée.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid avec $\mathbb{E}[(X_i)_+] < +\infty$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $S_0 = 0$. Le processus des gain est donné par $Y_n = \beta S_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ avec $\beta \in]0, 1[$ et $Y_\infty = 0$.

a) Utiliser la loi forte des grandes nombres pour $n^{-1} \sum_{k=1}^n (X_k)_+$ et montrer que $\mathrm{limsup}_n Y_n \leqslant 0$. Donc **H2** est verifié.

b) Montrer que $Y_n \leqslant \sum_{k=1}^n \beta^k (X_k)_+$ et deduire que l'hypothese **H1** est verifié. Montrer que on a

$$\mathbb{E}[\sup_n Y_n] \leqslant \frac{\beta}{1-\beta} \mathbb{E}[(X_1)_+].$$

c) On veut montrer que il faut pas s'arreter quand $S_n < 0$ (pourquoi?). Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}(S_T < 0) > 0$. Montrer qu'il existe un autre temps d'arret T' tel que $\mathbb{P}(S_T < 0) = 0$ et que $\mathbb{E}[Y_{T'}] > \mathbb{E}[Y_T]$.

d) Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une chaîne de Markov homogene et que le probleme a une structure markovienne. On notera $\mathbb{P}_s$ et $\mathbb{E}_s$ la loi et l'esperance relatives à la chaine de Markov $(S_n)_{n\geqslant 0}$ avec etat initiale $S_0 = s$:

$$\mathbb{E}_s[f(S_1, \ldots, S_n)] = \mathbb{E}[f(s + X_1, \ldots, s + X_1 + \cdots + X_n)] = \mathbb{E}_0[f(s + S_1, \ldots, s + S_n)]$$

pour toutes fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour lesquels l'integrale existe.

e) Soit $v_n(s) = \mathrm{essup}_{T \geqslant n} \mathbb{E}[Y_T | S_n = s]$. On admettra l'equation

$$v_n(s) = \mathrm{esssup}_{T\geqslant 1} \mathbb{E}[Y_{n-1+T} | S_1 = s]$$

Montrer que $v_1(s)$ satisfait $v_1(s) = \beta \max(s, \mathbb{E}_s[v_1(S_1)])$.

f) Montrer que un t.a. optimal est donné par $T^\star = \inf\{n \geqslant 1 : S_n \in D\}$ où

$$D = \{s \in \mathbb{R} : s \geqslant \mathbb{E}_s[v_1(S_1)]\}.$$

g) Montrer que $\mathbb{E}_s[v_1(S_1)] = \mathbb{E}_s[Y_T]$ ou T est un quelqonque t.a. optimal.

h) Si on ecrit $T = t(S_1, S_2, \ldots)$ alors montrer que on a

$$\mathbb{E}_0[y_T(s + S_T)] = \mathbb{E}_s[y_{T'}(S_{T'})] = \mathbb{E}_s[Y_{T'}]$$

où $T' = t(S_1 - s, S_2 - s, \ldots)$ est un nouveau temps d'arret.

i) Deduire que $D = \{s \in R \colon s \geqslant \mathbb{E}_0[\beta^{T'} S_{T'}]/(1 - \mathbb{E}_0[\beta^{T'}])\}$ et donc que la condition d'arret optimal est donné par un depassement de seuil: le temps d'arret optimal est de la forme $T_\alpha = \inf\{n \geqslant 1 : S_n \geqslant \alpha\}$ pour un quelque $\alpha \in \mathbb{R}$.

j) Soit S un t.a. optimal, montrer que $v_1(s) = \mathbb{E}[Y_S | S_1 = s] = \mathbb{E}[\beta^S$