Existence de règles optimales en horizon infini

On considère les hypothèses suivantes:

H1. $Y^\star = \sup_{n \geqslant 1} Y_n$ est telle que $\mathbb{E}[(Y^\star)_+] < +\infty$;

H2. $\limsup_{n\to\infty} Y_n \leqslant Y_\infty$.

L'hypothèse **H1** est suffisante pour garantir que les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n]$ soient bien définies pour tout t.a. T, en effet on a que $(Y_T)_+ \leqslant (Y^\star)_+ \in L^1(\Omega)$ et donc on peut définir sans problème $\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(Y_T)_+|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[(Y_T)_-|\mathcal{F}_n]$ car le membre de droite de cette égalité est toujours bien défini: si $\mathbb{E}[(Y_T)_-|\mathcal{F}_n] = +\infty$ on a que $\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] = -\infty$ car $\mathbb{E}[(Y_T)_+|\mathcal{F}_n] < +\infty$.

Toutes les manipulations des moyennes de Y dans cette section sont justifiées par **H1**: par exemple on a que

$$\mathbb{E}[Y_T] = \sum_{k=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_k \mathbb{I}_{T=k}] \tag{1}$$

car $1 = \sum_{k=1}^{=\infty} \mathbb{I}_{T=k}$ et par le théorème de Fubini:

$$\mathbb{E}[(Y_T)_\pm] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{=\infty} \mathbb{I}_{T=k}(Y_T)_\pm] = \sum_{k=1}^{=\infty} \mathbb{E}[(Y_k)_\pm \mathbb{I}_{T=k}]$$

étant $\mathbb{E}[(Y_T)_+] < +\infty$ on a la (1).

Deux exemples qui montrent l'intérêt des hypothèses **H1** et **H2**:

Exemple 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid de v.a. de Bernoulli de paramètre 1/2. Le processus des gains est donné par $Y_n = (2^n - 1)X_1 X_2 \cdots X_n$ et on prend $Y_\infty = 0$. On a que $\lim_n Y_n = 0$ p.s. donc l'hypothèse **H2** est vérifiée. D'autre part, si on note $S = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 0\}$, on a que

$$\sup_n Y_n = (2^{S-1} - 1) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S = k) = 2^{-(k-1)}2^{-1} = 2^{-k}$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}[\sup_n Y_n] = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k-1} - 1)2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-1} - 2^{-k}) = +\infty$$

montrant que **H1** n'est pas vérifiée. Dans cet problème il n'existe pas de règle optimale: si T est un temps d'arrêt alors $T + 1$ est encore un temps d'arrêt qui admet un gain moyen strictement plus grand:

$$\mathbb{E}[Y_{T+1}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_{n+1}\mathbb{I}_{T=n}] = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 1)\mathbb{E}[X_1 \cdots X_{n+1}\mathbb{I}_{T=n}]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 1)\,\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n \mathbb{I}_{T=n}]\mathbb{E}[X_{n+1}] = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1/2)\,\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n \mathbb{I}_{T=n}]$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)\,\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n \mathbb{I}_{T=n}] = \mathbb{E}[Y_T].$$

Exemple 2. Soit $Y_n = 1 - 1/n$ et $Y_\infty = 0$. Ici l'hypothèse **H1** est trivialement vérifiée et **H2** non. Il est clair que il n'y a pas existence de règle optimale car plus on attend, plus on gagne mais si on s'arrête jamais on gagne rien...

Définition 3. *On dit que T est un t.a. régulier ssi $\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] > Y_n$ sur l'événement $\{T > n\}$.*

Remarque 4. On dit que pour une v.a. A et un événement B on a $A > 0$ sur B ssi $\mathbb{P}(A > 0|B) = 1$.

Lemme 5. *Supposons **H1**. Pour tout t.a. T il existe un t.a. régulier $\tilde{T}$ tel que $\mathbb{E}[Y_T] \leqslant \mathbb{E}[Y_{\tilde{T}}]$.*

Démonstration. On pose $\tilde{T} = \min\{n \geqslant 1 \colon \mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] \leqslant Y_n\}$. La définition de $\tilde{T}$ donne directement que $\tilde{T} \leqslant T$. En effet sur l'événement $\{T = k\}$ on a que $\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_k] = Y_k$ car $\mathbb{I}_{T=k}$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable et donc $\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_k]\mathbb{I}_{T=k} = \mathbb{E}[Y_T\mathbb{I}_{T=k}|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[Y_k\mathbb{I}_{T=k}|\mathcal{F}_k] = Y_k\mathbb{I}_{T=k}$. Ce que implique que sur $\{T = k\}$ on a $\tilde{T} \leqslant k = T$. L'inégalité $\tilde{T} \leqslant T$ étant valable sur $\{T = k\}$ pour tout $k \geqslant 1$ et pour $k = \infty$, on l'a sur tout Ω.

$$\mathbb{E}[Y_{\tilde{T}}] = \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_n\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=n}] \geqslant \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n]\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=n}] = \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_T\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=n}|\mathcal{F}_n]]$$

$$= \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_T\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=n}] = \mathbb{E}[Y_T].$$

Montrons maintenant la régularité de $\tilde{T}$. L'argument est similaire au précèdent. Sur l'événement $\{\tilde{T} > n\}$ on a que

$$\mathbb{E}[Y_{\tilde{T}}|\mathcal{F}_n] = \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_k\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=k}|\mathcal{F}_n] \geqslant \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_k]\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=k}|\mathcal{F}_n] = \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_T\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=k}|\mathcal{F}_k]|\mathcal{F}_n]$$

où on a utilisé la définition de $\tilde{T}$ et le fait que $\{\tilde{T} > n\} \subseteq \{T > n\}$. Maintenant $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_k$ car $n \leqslant k$ et donc $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_T\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=k}|\mathcal{F}_k]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_T\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=k}|\mathcal{F}_n]$ ce qui permet de conclure que sur $\{\tilde{T} > n\}$

$$\mathbb{E}[Y_{\tilde{T}}|\mathcal{F}_n] \geqslant \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_T\,\mathbb{I}_{\tilde{T}=k}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] > Y_n$$

car T est régulier et on est aussi sur l'événement $\{T > n\}$. Le t.a. $\tilde{T}$ est régulier. □

Lemme 6. *Suppose **H1**. Si T_1 et T_2 sont t.a. réguliers alors $T = \max(T_1, T_2)$ est régulier et*

$$\mathbb{E}[Y_T] \geqslant \max(\mathbb{E}[Y_{T_1}], \mathbb{E}[Y_{T_2}]).$$

Démonstration.

$$\mathbb{E}[Y_T] = \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_T\mathbb{I}_{T_1=n}] = \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_T\mathbb{I}_{T_1=n,T_2\leqslant n}] + \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_T\mathbb{I}_{T_1=n,T_2>n}]$$

$$= \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_{T_1}\mathbb{I}_{T_1=n,T_2\leqslant n}] + \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_{T_2}\mathbb{I}_{T_1=n,T_2>n}]$$

Par la régularité de T_2 on a

$$\mathbb{E}[Y_{T_2}\mathbb{I}_{T_1=n,T_2>n}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{T_2}|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_{T_1=n,T_2>n}] \geqslant \mathbb{E}[Y_n\mathbb{I}_{T_1=n,T_2>n}] = \mathbb{E}[Y_{T_1}\mathbb{I}_{T_1=n,T_2>n}]$$

et donc

$$\mathbb{E}[Y_T] \geqslant \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_{T_1} \mathbb{I}_{T_1=n, T_2 \leqslant n}] + \sum_{n=1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_{T_1} \mathbb{I}_{T_1=n, T_2>n}] = \mathbb{E}[Y_{T_1}].$$

Bien sur le même argument marche pour T_2 et donc $\mathbb{E}[Y_T] \geqslant \max(\mathbb{E}[Y_{T_1}], \mathbb{E}[Y_{T_2}])$. Pour monter la régularité de T on utilise un argument similaire pour prouver que

$$\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] \geqslant \mathbb{E}[Y_{T_1}|\mathcal{F}_n] \qquad \text{sur } \{T_1 > n\} \tag{2}$$

et

$$\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] \geqslant \mathbb{E}[Y_{T_2}|\mathcal{F}_n] \qquad \text{sur } \{T_2 > n\} \tag{3}$$

par la régularité de T_1 et T_2 on obtient

$$\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] \geqslant Y_n \qquad \text{sur } \{T_1 > n\}$$

et

$$\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] \geqslant Y_n \qquad \text{sur } \{T_2 > n\}$$

mais $\{T > n\} = \{T_1 > n\} \cup \{T_2 > n\}$ et donc on obtient aussi que $\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] \geqslant Y_n$ est vérifiée sur tout l'ensemble $\{T > n\}$. Il nous reste de montrer l'inégalité (2) (le même argument pouvant s'appliquer pour la (3)). Sur $\{T_1 > n\}$ on a aussi $T > n$ et

$$\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] = \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_T \mathbb{I}_{T_1=k, T_2 \leqslant k}|\mathcal{F}_n] + \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_T \mathbb{I}_{T_1=k, T_2>k}|\mathcal{F}_n]$$

$$= \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_{T_1} \mathbb{I}_{T_1=k, T_2 \leqslant k}|\mathcal{F}_n] + \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_{T_2} \mathbb{I}_{T_1=k, T_2>k}|\mathcal{F}_n]$$

$$\geqslant \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_{T_1} \mathbb{I}_{T_1=k, T_2 \leqslant k}|\mathcal{F}_n] + \sum_{k=n+1}^{=\infty} \mathbb{E}[Y_k \mathbb{I}_{T_1=k, T_2>k}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_{T_1}|\mathcal{F}_n].$$

par la régularité de T_2. □

Théorème 7. *Supposons H1 et H2. Il existe une règle d'arrêt $T^\flat$ qui maximise le gain moyen:*

$$\mathbb{E}[Y_{T^\flat}] = \sup_T \mathbb{E}[Y_T] = V^\star.$$

Démonstration. Si $V^\star = -\infty$ alors $\mathbb{E}[Y_T] = -\infty$ pour tout T et donc le résultat est trivial. Supposons donc que $-\infty < V^\star < +\infty$. Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite maximisante de t.a., i.e. telle que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_{T_n}] = V^\star$. Par le Lemme 5 pour chaque T_n il existe un t.a. régulier $\tilde{T}_n$ tel que $\mathbb{E}[Y_{\tilde{T}_n}] \geqslant \mathbb{E}[Y_{T_n}]$ et donc la suite $(\tilde{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est elle aussi maximisante. Soit $\hat{T}_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \tilde{T}_n$. Par le Lemme 6 le t.a. $\hat{T}_n$ est aussi régulier et par construction la suite $(\hat{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Il existe donc la limite $T^\flat = \lim_{n\to\infty} \hat{T}_n = \sup_n \hat{T}_n$ qui est un temps d'arrêt (exercice). Sur l'événement $\{T^\flat = \infty\}$ on a que la suite $(\hat{T}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $+\infty$ et donc par H2, $\operatorname{limsup}_n Y_{\hat{T}_n} \leqslant Y_\infty = Y_{T^\flat}$. Sur l'événement $\{T^\flat = k\}$ avec $k < \infty$ la suite $(\hat{T}_n)_{n\geqslant 1}$ reste constante à partir d'un certain index N (qui dépends de ω): $\hat{T}_n = k$ pour tout $n \geqslant N$. Dans ce cas on a $\lim_n Y_{\hat{T}_n} = Y_k = Y_{T^\flat}$. Donc on vient de montrer que $\operatorname{limsup}_n Y_{\hat{T}_n} \leqslant Y_{T^\flat}$ presque sûrement. Pour conclure on utilise le lemme de Fatou:

$$V^\star = \operatorname*{limsup}_n \mathbb{E}[Y_{\hat{T}_n}] \leqslant \mathbb{E}[\operatorname*{limsup}_n Y_{\hat{T}_n}] \leqslant \mathbb{E}[Y_{T^\flat}] \leqslant \sup_T \mathbb{E}[Y_T] = V^\star$$

ce qui donne finalement $\mathbb{E}[Y_{T^\flat}] = V^\star$. $\square$

Vendre un bien

On considère le problème d'arrêt suivante: $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite iid de loi connue, $c > 0$ une constante, $Y_n = X_n - c\,n$ le processus des gains et $Y_\infty = -\infty$ le gain dans l'éventualité de ne jamais s'arrêter. Ce problème modélise la situation ou on a un bien à vendre pour lequel on reçoit des offres X_n en présence d'un coût de maintien par unité de temps qui est $c > 0$.

En première instance on va déterminer des conditions suffisantes sur la loi des X_n pour garantir l'existence d'une règle d'arrêt optimale.

D'abord une lemme technique.

Lemme 8. *Pour tout v.a. Z on a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n) \leqslant \mathbb{E}[(Z)_+]$ et*

$$\mathbb{E}[Z_+] \leqslant \int_0^\infty \mathbb{P}(Z \geqslant z)\mathrm{d}z$$

Démonstration. Pour la première inégalité on a simplement que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n) = \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{Z \geqslant n}] = \mathbb{E}[(\lfloor Z_+ \rfloor)] \leqslant \mathbb{E}[(Z)_+].$$

Pour la deuxième:

$$\mathbb{E}[Z_+] = \mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{I}_{Z \geqslant z}\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z \geqslant z)\mathrm{d}z.$$

$\square$

Ensuite on donne des conditions sur la loi de X pour avoir les hypothèses **H1** et **H2**.

Lemme 9. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid. Alors*

i. si $\mathbb{E}[(X)_+] < +\infty$ on a que $\sup_{n\geqslant 1} Y_n < +\infty$ presque sûrement et $\lim_{n\to+\infty} Y_n = -\infty$;

ii. si $\mathbb{E}[(X)_+^2] < +\infty$ alors $\mathbb{E}[(\sup_{n\geqslant 1} Y_n)_+] < +\infty$.

Démonstration. $\sup_{n\geqslant 1} Y_n <$

$$\mathbb{P}(\sup_{n\geqslant 1} Y_n \geqslant L) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \geqslant L) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant L + c\,n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant L + c\,n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}((X - L)/c \geqslant n) \leqslant \frac{1}{c}\mathbb{E}[(X - L)_+]$$

ou on a utilisé le Lemme 8. Par l'integrabilité de X_+, l'inégalité $(X - L)_+ \leqslant X_+$ pour $L > 0$ et le théorème de convergence dominée on a que $\mathbb{E}[(X - L)_+] \to 0$ quand $L \to +\infty$ et donc

$$\mathbb{P}(\sup_{n\geqslant 1} Y_n = +\infty) = \lim_{L\to+\infty} \mathbb{P}(\sup_{n\geqslant 1} Y_n \geqslant L) = 0$$

pour tout $c > 0$. Maintenant on peut écrire

$$Y_n = X_n - c\,n/2 - cn/2 \leqslant \sup_{k \geqslant 1} (X_k - c\,k/2) - c\,n/2.$$

Par le résultat précèdent on a que $\sup_{k \geqslant 1} (X_k - c\,k/2) = C < + \infty$ p.s. et donc

$$\limsup_{n \to \infty} Y_n \leqslant C + \limsup_{n \to \infty} (-c\,n/2) = -\infty$$

presque sûrement.

Pour montrer (ii) on observe que

$$\mathbb{E}[(\sup_{n \geqslant 1} Y_n)_+] = \int_0^\infty \mathbb{P}(\sup_{n \geqslant 1} Y_n \geqslant z)\,\mathrm{d}z \leqslant \frac{1}{c} \int_0^\infty \mathbb{E}((X - z)_+)\mathrm{d}z = \frac{1}{c}\mathbb{E}[\int_0^\infty (X - z)_+]\mathrm{d}z$$

et $\int_0^\infty (x - z)_+ \mathrm{d}z = \int_0^{x_+} (x_+ - z)\mathrm{d}z = x_+^2/2$ ce qui donne

$$\mathbb{E}[(\sup_{n \geqslant 1} Y_n)_+] \leqslant \frac{1}{2c}\mathbb{E}[X_+^2].$$

□

Par le lemme précèdent, si on suppose que $\mathbb{E}[X_+^2] < +\infty$ on a bien au même temps que $\lim_{n \to \infty} Y_n \leqslant Y_\infty$ et que $\mathbb{E}(\sup_n \; Y_n)_+ < +\infty$. Il existe donc une règle d'arrêt optimale pour ce problème. On la note $T^\flat$:

$$V^\star = \sup_T \mathbb{E}[Y_T] = \mathbb{E}[Y_{T^\flat}].$$

En général, la règle optimale n'est pas unique. Notre but c'est de déterminer le gain moyen optimal $V^\star$ et aussi éventuellement une règle optimale $T^\flat$ qui atteint ce gain moyen.

Avant de continuer, on aura besoin de spécifier mieux la structure de l'espace Ω. On peut prendre $\Omega = \mathbb{R}^\mathbb{N}$, l'espace des suites infinie de nombres réels avec sa σ-algèbre Borelienne $\mathcal{F}$. Les points de Ω sont $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots.)$ avec $\omega_k \in \mathbb{R}$. On considère les v.a. $X_k(\omega) = \omega_k$ pour $k = 1, 2, \ldots.$ La probabilité $\mathbb{P}$ est déterminé de façon unique par la formule

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(\omega \in A_1 \times \cdots \times A_k \times \mathbb{R} \times \cdots) = P(A_1) \cdots P(A_k)$$

ou $P(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ c'est la probabilité associé à la variable aléatoire X. La suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est bien une suite iid sur la probabilité $\mathbb{P}$. Sur l'espace Ω on peut considérer la transformation θ: $\Omega \to \Omega$ tel que $\theta(\omega_1, \omega_2, \ldots) = (\omega_2, \omega_3, \ldots)$ qui vérifie la propriété $X_k \circ \theta(\omega) = X_k(\theta(\omega)) = X_k(\omega_2, \omega_3, \ldots) = \omega_{k+1} = X_{k+1}(\omega)$. On appelle la transformation θ le *shift*.

Lemme 10. *Si F est une v.a. intégrable sur Ω alors $\mathbb{E}[F \circ \theta] = \mathbb{E}[F]$. On dit que la loi $\mathbb{P}$ est invariante par rapport à la transformation θ.*

Démonstration. Par approximation il suffit de montrer l'énoncé pour une v.a. bornée $F \in \mathcal{F}_k$ pour un quelque $k \in \mathbb{N}$. Par la $\mathcal{F}_k$-mesurabilité de F on a qu'il existe une fonction mesurable f: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tel que $F = f(X_1, \ldots, X_k)$ et donc que $F(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_k)$. On a donc

$$F \circ \theta(\omega) = F(\theta(\omega)) = f(\theta(\omega)_1, \ldots, \theta(\omega)_k) = f(\omega_2, \ldots, \omega_k) = F(X_2(\omega), \ldots, X_{k+1}(\omega))$$

ce qui donne $\mathbb{E}(F\circ\theta)=\mathbb{E}[f(X_2,\ldots,X_{k+1})]=\mathbb{E}[f(X_1,\ldots,X_k)]=\mathbb{E}[F]$ car le vecteur aléatoire $(X_2,\ldots,X_{k+1})$ et le vecteur $(X_1,\ldots,X_k)$ ont la même loi. $\square$

Maintenant on peut caractériser le gain moyen optimal et décrire un temps d'arrêt optimale:

Théorème 11. *Le gain moyen optimal $V^\star$ satisfait l'équation suivante:*

$$c=\mathbb{E}[(X-V^\star)_+]$$

et le temps d'arrêt $T_{V^\star}=\inf\{n\geqslant 1: X_n\geqslant V^\star\}$ est optimal: $\mathbb{E}[Y_{T_{V^\star}}]=V^\star$.

Démonstration. On va décomposer la preuve en différentes étapes. Soit $T^\flat$ un temps d'arrêt optimal. Il existe un ensemble mesurable $A\subseteq\mathbb{R}$ et une famille de temps d'arrêt $\{T_x^{\flat\flat}: x\in\mathbb{R}\}$ tels que

$$T^\flat(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } X_1(\omega)\in A\\ 1+T^{\flat\flat}(\theta(\omega))_{X_1(\omega)} & \text{sinon}\end{cases}$$

On notera $T^{\flat\flat}(\theta(\omega))_{X_1(\omega)}=((T^{\flat\flat}\circ\theta)_{X_1})(\omega)$ On a alors que

$$\mathbb{E}[Y_{T^\flat}]=\mathbb{E}[Y_{T^\flat}\mathbb{I}_{X_1\in A}]+\mathbb{E}[Y_{T^\flat}\mathbb{I}_{X_1\notin A}]=\mathbb{E}[Y_1\mathbb{I}_{X_1\in A}]+\mathbb{E}[Y_{1+(T^\flat\circ\theta)_{X_1}}\mathbb{I}_{X_1\notin A}]$$

$$=\mathbb{E}[(X_1-c)\mathbb{I}_{X_1\in A}]+\mathbb{E}[((Y\circ\theta)_{(T^\flat\circ\theta)_{X_1}}-c)\mathbb{I}_{X_1\notin A}]$$

$$=\mathbb{E}[(X_1-c)\mathbb{I}_{X_1\in A}]+\mathbb{E}[(\mathbb{E}[(Y\circ\theta)_{(T^{\flat\flat}\circ\theta)_{X_1}}|\mathcal{F}_1]-c)\mathbb{I}_{X_1\notin A}]$$

où on a utilisé l'égalité $Y_{n+1}=Y_n\circ\theta-c$. On a aussi que $[(Y\circ\theta)_{(T^{\flat\flat}\circ\theta)_x}](\omega)=Y_{T_x^{\flat\flat}(\theta(\omega))}(\theta(\omega))=[(Y_{T_x^{\flat\flat}})\circ\theta](\omega)$ qui est une variable aléatoire qui ne dépends pas de ω_1 et donc de $X_1(\omega)$. Le calcul de l'espérance conditionnelle à droite donne

$$\mathbb{E}[(Y\circ\theta)_{(T^{\flat\flat}\circ\theta)_{X_1}}|\mathcal{F}_1]=\mathbb{E}[(Y\circ\theta)_{(T^{\flat\flat}\circ\theta)_{X_1}}|X_1]=\varphi(X_1)$$

où $\varphi(x)=\mathbb{E}[(Y\circ\theta)_{(T^{\flat\flat}\circ\theta)_x}]=\mathbb{E}[(Y_{T_x^{\flat\flat}})\circ\theta]$. Par la propriété d'invariance du shift θ par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ on a que $\varphi(x)=\mathbb{E}[Y_{T_x^{\flat\flat}}]$, évidemment donc $\varphi(x)\leqslant\sup_T\mathbb{E}[Y_T]=V^\star$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (en effet il suffit $x\in\mathbb{R}\backslash A$). A ce point on a que

$$\mathbb{E}[Y_{T^\flat}]=\mathbb{E}[(X_1-c)\mathbb{I}_{X_1\in A}]+\mathbb{E}[(\varphi(X_1)-c)\mathbb{I}_{X_1\notin A}]$$

Maintenant on va montrer que l'optimalité de $T^\flat$ implique que $\varphi(x)=V^\star$ et que elle implique aussi $A=\{x\in\mathbb{R}: x\geqslant V^\star\}$. Cela va permettre de conclure.

Supposons par absurde que il existe un ensemble $B\subseteq\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X_1\in B\cap A^c)>0$ et que $\varphi(x)<V^\star$ pour $x\in B$. Alors on peut considérer la règle d'arrêt modifié suivante:

$$T_1(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } X_1(\omega)\in A\\ 1+T^\flat(\theta(\omega)) & \text{si } X_1(\omega)\in B\cap A^c\\ 1+T^{\flat\flat}(\theta(\omega))_{X_1(\omega)} & \text{sinon}\end{cases}$$

la règle T_1 di que si $X_1\in B\cap A^c$ on va utiliser la règle optimale $T^\flat$ (ou n'importe quelle autre règle optimale) pour continuer. Le gain moyen de T_1 est

$$\mathbb{E}[Y_{T_1}]=\mathbb{E}[(X_1-c)\mathbb{I}_{X_1\in A}]+\mathbb{E}[(V^\star-c)\mathbb{I}_{X_1\notin A,X_1\in B}]+\mathbb{E}[(\varphi(X_1)-c)\mathbb{I}_{X_1\notin A,X_1\notin B}]$$

maintenant par la définition de B on a que $\mathbb{E}[\varphi(X_1)\mathbb{I}_{X_1 \notin A, X_1 \in B}] < \mathbb{E}[V^\star \mathbb{I}_{X_1 \notin A, X_1 \in B}]$ et donc que

$$\mathbb{E}[Y_{T_1}] > \mathbb{E}[(X_1 - c)\,\mathbb{I}_{X_1 \in A}] + \mathbb{E}[(\varphi(X_1) - c)\,\mathbb{I}_{X_1 \notin A, X_1 \in B}] + \mathbb{E}[(\varphi(X_1) - c)\,\mathbb{I}_{X_1 \notin A, X_1 \notin B}] = \mathbb{E}[Y_{T^\flat}]$$

ce qui est en contradiction avec l'optimalité de $T^\flat$.

On a donc $\varphi(X_1) = V^\star$ presque sûrement sur $\{X_1 \notin A\}$. Le gain moyen de $T^\flat$ prends alors la forme

$$\mathbb{E}[Y_{T^\flat}] = \mathbb{E}[(X_1 - c)\,\mathbb{I}_{X_1 \in A}] + \mathbb{E}[(V^\star - c)\,\mathbb{I}_{X_1 \notin A}] = V^\star - c + \mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X \in A}].$$

Maintenant on veut montrer que nécessairement $A = A_\star = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqslant V^\star\}$. D'abord on remarque que $\mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X \in A}] \leqslant \mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X \in A_\star}] = \mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X_1 \geqslant V^\star}] = \mathbb{E}[(X - V^\star)_+]$ car

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X \in A}] &= \mathbb{E}[(X - V^\star)_+\,\mathbb{I}_{X \in A}] - \mathbb{E}[(X - V^\star)_-\,\mathbb{I}_{X \in A}] \\ &\leqslant \mathbb{E}[(X - V^\star)_+\,\mathbb{I}_{X \in A}] \leqslant \mathbb{E}[(X - V^\star)_+\,].\end{aligned}$$

En plus, si $A \neq A_\star$ on a que $\mathbb{E}[(X - V^\star)_-\,\mathbb{I}_{X \in A}] = \mathbb{E}[(X - V^\star)_-\,\mathbb{I}_{X \in A, X \notin A_\star}] > 0$ car $(X - V^\star)_- > 0$ en dehors de $A_\star$ et que si $A \neq A_\star$ alors $A \cap A_\star^c \neq \emptyset$. Ce qui implique que si $A \neq A_\star$ on a

$$\mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X \in A}] < \mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X \in A_\star}].$$

Donc si $A \neq A_\star$ on peut construire une règle d'arrêt modifié T_2 telle que

$$T_2(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1(\omega) \in A_\star \\ 1 + T^{\flat\flat}(\theta(\omega))_{X_1(\omega)} & \text{sinon} \end{cases}$$

e pour laquelle

$$\mathbb{E}[Y_{T_2}] = V^\star - c + \mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X \in A_\star}] > \mathbb{E}[Y_{T^\flat}].$$

On trouve encore une contradiction avec l'optimalité de $T^\flat$ ce qu'implique que $A = A_\star$ et donc que le gain optimal satisfait l'équation

$$V^\star = \mathbb{E}[Y_{T^\flat}] = V^\star - c + \mathbb{E}[(X - V^\star)\mathbb{I}_{X \in A_\star}] = V^\star - c + \mathbb{E}[(X - V^\star)_+]$$

ce qui est équivalent à $\mathbb{E}[(X - V^\star)_+] = c$.

Pour déterminer une règle d'arrêt explicite on introduit la famille de temps d'arrêt $T_\alpha = \inf\{n \geqslant 1 \colon X_n \geqslant \alpha\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Un calcul direct donne que

$$\mathbb{E}[Y_{T_\alpha}] = \mathbb{E}[X_{T_\alpha}] - c\mathbb{E}[T_\alpha] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{X \geqslant \alpha}] - c}{\mathbb{P}(X \geqslant \alpha)} = \alpha + \frac{\mathbb{E}[(X - \alpha)\mathbb{I}_{X \geqslant \alpha}] - c}{\mathbb{P}(X \geqslant \alpha)} = \alpha + \frac{\mathbb{E}[(X - \alpha)_+] - c}{\mathbb{P}(X \geqslant \alpha)}$$

et si on prend $\alpha = V^\star$ on a $\mathbb{E}[T_{V^\star}] = V^\star$. Le temps d'arrêt $T_{V^\star}$ (premier instant d'atteinte de le seuil $V^\star$ par le processus X_n) est donc un t.a. optimal pour le problème. $\square$

Le principe d'optimalité

La preuve du théorème précèdent nous éclair sur la condition d'optimalité pour un temps d'arrêt

Lemme 12. *Si $T^\flat$ est un temps d'arrêt optimal alors au temps n on doit avoir*

$$\mathbb{E}[Y_{T^\flat} | \mathcal{F}_n] \geqslant \mathbb{E}[Y_T | \mathcal{F}_n] \qquad \text{sur } \{T^\flat > n\} \tag{4}$$

pour tout temps d'arrêt T qui vérifie presque sûrement $T \geqslant n$.

Démonstration. En effet si ça n'est pas vrai il existe un ensemble $B \in \mathcal{F}_n$, $B \subseteq \{T^\flat > n\}$ et un temps d'arrêt $S \geqslant n$ tel que $\mathbb{E}[Y_{T^\flat}|\mathcal{F}_n] < \mathbb{E}[Y_S|\mathcal{F}_n]$ sur B et $\mathbb{P}(B) > 0$. Mais dans cet condition on peut construire un nouveau temps d'arrêt

$$T' = \begin{cases} S & \text{sur } B \\ T^\flat & \text{sur } B^c \end{cases}$$

(vérifier que cette définition donne bien un temps d'arrêt) et on aura que

$$\mathbb{E}[Y_{T'}] = \mathbb{E}[Y_{T'}\mathbb{I}_B] + \mathbb{E}[Y_{T'}\mathbb{I}_{B^c}] = \mathbb{E}[Y_S\mathbb{I}_B] + \mathbb{E}[Y_{T^\flat}\mathbb{I}_{B^c}]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_S|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_B] + \mathbb{E}[Y_{T^\flat}\mathbb{I}_{B^c}] > \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{T^\flat}|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_B] + \mathbb{E}[Y_{T^\flat}\mathbb{I}_{B^c}] = \mathbb{E}[Y_{T^\flat}]$$

ce qui donne une contradiction. □

On interprète cette observation en disant que un temps d'arrêt optimal doit l'être à chaque temps, dans le sens précis donné par l'eq. (4): à tout temps n et dans toutes les condition du jeux, je peut continuer à utiliser le temps optimal car il n'existe null'autre temps d'arrêt qui donne en moyenne un gain futur meilleur.

Pour caractériser le meilleur gain moyen qui on peut s'attendre dans le futur au temps n on introduit la famille de v.a.s

$$V_n^\star = \sup_{T \geqslant n} \mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] \tag{5}$$

c'est a dire: conditionnellement au passé du temps n on considère le gain moyenne de toutes les règles d'arrêt T dans le futur du temps n (i.e. telles que $T \geqslant n$ presque sûrement, avec n inclus) et on l'optimise. Cette définition porte une légère difficulté technique: à savoir, les temps d'arrêt qui prennent valeurs dans l'ensemble $[n, +\infty]$ sont non dénombrables (pourquoi?). Donc l'opération de maximisation doit prendre en compte une quantité non dénombrable de variables aléatoires et ça peut conduire a une fonction sur Ω qui n'est pas mesurable, et donc le sup dans l'eq (5) peut n'être pas une variable aléatoire, ce qui est la chose la plus embêtante en probabilités. Et même si le supremum est mesurable il peut ne pas être ce que on s'attend, comme démontre l'exemple suivante:

Exemple 13. Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Y_t = \mathbb{I}_{U=t}$ pour $t \in [0,1]$. Alors $\sup_{t \in [0,1]} Y_t = 1$ mais $\mathbb{P}(Y_t > 0) = 0$. Donc les v.a. Y_t sont presque sûrement nulles mais leur supremum est 1!

Pour contourner cette difficulté il faut introduire une notion diffèrent de supremum, le supremum essentiel.

Définition 14. *On dit que une v.a. X est le supremum essentiel d'une famille $\{Y_t\}_{t \in I}$ des v.a. et on note $X = \operatorname{esssup}_{t \in I} Y_t$, ssi $\mathbb{P}(X \geqslant Y_t) = 1$ pour tout $t \in I$ et si X' est un autre v.a. qui vérifie $\mathbb{P}(X' \geqslant Y_t) = 1$ pour tout $t \in I$ alors $\mathbb{P}(X' \geqslant X) = 1$. En mot: X est la plus petite v.a. qui majeure toutes les v.a. Y_t presque sûrement.*

On admettra l'existence du supremum essentiel et aussi l'existence d'un sous-ensemble $J \subseteq I$ dénombrable pour lequel $\operatorname{esssup}_{t \in I} Y_t = \sup_{t \in J} Y_t$.

Maintenant on peut définir:

$$V_n^\star = \mathrm{esssup}_{T \geqslant n} \mathbb{E}[Y_T | \mathcal{F}_n] \tag{6}$$

qui est une v.a. $\mathcal{F}_n$ mesurable. Bien évidemment on a que $V_0^\star = V^\star$ le gain moyen optimal du problème d'arrêt. Par nos observation précédentes on a aussi que

$$\mathbb{E}[Y_{T^\flat} | \mathcal{F}_n] = V_n^\star \qquad \text{sur } \{T^\flat > n\}.$$

Soit maintenant $n \geqslant 1$ et S un t.a. supérieur ou égale à n. On a

$$\mathbb{E}[Y_S | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_S \mathbb{I}_{S=n} | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_S \mathbb{I}_{S>n} | \mathcal{F}_n] = Y_n \mathbb{I}_{S=n} + \mathbb{E}[Y_S \mathbb{I}_{S \geqslant n+1} | \mathcal{F}_n]$$

$$= Y_n \mathbb{I}_{S=n} + \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_S | \mathcal{F}_{n+1}] \mathbb{I}_{S \geqslant n+1} | \mathcal{F}_n] \leqslant Y_n \mathbb{I}_{S=n} + \mathbb{E}[V_{n+1}^\star | \mathcal{F}_n] \mathbb{I}_{S>n} \leqslant \max(Y_n, \mathbb{E}[V_{n+1}^\star | \mathcal{F}_n]).$$

Comme ceci est valable pour n'importe quel temps d'arrêt $S \geqslant n$ on a que

$$V_n^\star = \mathrm{esssup}_{S \geqslant n} \mathbb{E}[Y_S | \mathcal{F}_n] \leqslant \max(Y_n, \mathbb{E}[V_{n+1}^\star | \mathcal{F}_n]).$$

Pour montrer l'inégalité opposée on remarque que, évidemment, $Y_n \leqslant V_n^\star$. Il nous reste donc à montrer que $V_n^\star \geqslant \mathbb{E}[V_{n+1}^\star | \mathcal{F}_n]$. On aura besoin des versions conditionnelles des Lemmes 5 et 6.

Définition 15. *On dit que un t.a. T est régulier de n en avant si pour tout $k \geqslant n$ on a*

$$\mathbb{E}[Y_T | \mathcal{F}_k] > Y_k \quad \text{sur } \{T > k\}.$$

Lemme 16. *Supposons **H1**. Pour tout t.a. $T \geqslant n$ il existe un t.a. régulier $\tilde{T} \geqslant n$ de n en avant tel que $\mathbb{E}[Y_T | \mathcal{F}_n] \leqslant \mathbb{E}[Y_{\tilde{T}} | \mathcal{F}_n]$.*

Lemme 17. *Suppose **H1**. Si $T_1 \geqslant n$ et $T_2 \geqslant n$ sont t.a. réguliers de n en avant alors $T = \max(T_1, T_2)$ est régulier de n en avant et*

$$\mathbb{E}[Y_T | \mathcal{F}_n] \geqslant \max(\mathbb{E}[Y_{T_1} | \mathcal{F}_n], \mathbb{E}[Y_{T_2} | \mathcal{F}_n]).$$

Les preuves des ces deux lemmes sont des adaptations élémentaires des preuves des Lemmes 5 et 6 aux espérances conditionnelles.

Par la définition de $V_{n+1}^\star$ on a que il existe une suite des temps d'arrêt $(T_k)_{k \geqslant 1}$ telle que $T_k \geqslant n+1$ et que $V_{n+1}^\star = \sup_k \mathbb{E}[Y_{T_k} | \mathcal{F}_{n+1}]$. Par le Lemme 16 on peut remplacer la suite $(T_k)_{k \geqslant 1}$ par une suite $(T_k')_{k \geqslant 1}$ de t.a. réguliers de $n+1$ en avant telle que $V_{n+1}^\star = \sup_k \mathbb{E}[Y_{T_k'} | \mathcal{F}_{n+1}]$. Soit $T_k'' = \max_{1 \leqslant l \leqslant k} T_l'$. Par le Lemme 17 on a encore $V_{n+1}^\star = \sup_k \mathbb{E}[Y_{T_k''} | \mathcal{F}_{n+1}]$. Donc

$$V_n^\star \geqslant \mathbb{E}[Y_{T_k''} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{T_k''} | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] \geqslant \mathbb{E}[\max_{1 \leqslant l \leqslant k} \mathbb{E}[Y_{T_k'} | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n]$$

où la dernière inégalité est due au Lemme 17. Maintenant la suite $\max_{1 \leqslant l \leqslant k} \mathbb{E}[Y_{T_k'} | \mathcal{F}_{n+1}]$ est croissante en k et converge de façon monotone à $V_{n+1}^\star$. Donc par le théorème de convergence monotone $V_n^\star \geqslant \mathbb{E}[V_{n+1}^\star | \mathcal{F}_n]$.

Si $n = 0$ on montre facilement que $V_0^\star = \mathbb{E}[V_1^\star]$. On est donc arrivé à montrer le principe d'optimalité suivante, qui dépends seulement de l'hypothèse **H1**:

Théorème 18. *(Principe d'optimalité) Supposons **H1**. La suite $(V_n^\star)_{n \geqslant 1}$ satisfait l'équation $V_n^\star = \max(Y_n, \mathbb{E}[V_{n+1}^\star | \mathcal{F}_n])$ et $V^\star = \mathbb{E}[V_1^\star]$.*

On a aussi monté qui si $T^\flat$ est un temps d'arrêt optimal alors $\mathbb{E}[Y_{T^\flat}|\mathcal{F}_n] = V_n^\star$ sur $\{T^\flat \geqslant n\}$ et donc sur l'ensemble $\{T^\flat = n\}$ on doit avoir $Y_n = V_n^\star$ ou, ce qui revient au même, $Y_n \geqslant \mathbb{E}[V_{n+1}^\star|\mathcal{F}_n]$: une règle optimale s'arrête seulement si le gain est égale au gain moyen attendu pour une continuation optimale du jeu. La règle optimale qui s'arrête le plus tôt est

$$T^\star = \inf\{n \geqslant 1 : Y_n = V_n^\star\}.$$

On remarque que cette règle est optimale seulement si effectivement une règle optimale existe (donc par exemple si l'hypothèse **H2** est vérifiée). Dans l'exemple 2 on a $V_n^\star = 1$ et $Y_n < V_n^\star$ pour tout $n \geqslant 1$ ce qui donne $T^\star = +\infty$ mais $Y_\infty = 0$!

L'optimalité de $T^\star$ peut être établi par l'argument suivante: si une règle optimale $T^\flat$ existe, alors sur $\{T^\flat = n\}$ on a $T^\star \leqslant n$ et donc $T^\star \leqslant T$:

$$\mathbb{E}[Y_{T^\flat}\mathbb{I}_{T^\star=n}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{T^\flat}|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_{T^\star=n}] = \mathbb{E}[V_n^\star \mathbb{I}_{T^\star=n}] = \mathbb{E}[Y_n \mathbb{I}_{T^\star=n}]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}[Y_{T^\flat}\mathbb{I}_{T^\star=+\infty}] = \mathbb{E}[Y_{T^\star}\mathbb{I}_{T^\star=+\infty}]$ et donc $\mathbb{E}[Y_{T^\flat}] = \mathbb{E}[Y_{T^\star}]$.

Cadre Markovien

Dans le cas markovien (i.e. quand $Y_n = y_n(X_n)$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une chaîne de Markov) on a que

$$V_n^\star = \mathrm{esssup}_{T\geqslant n}\mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n] = \mathrm{esssup}_{T\geqslant n}\mathbb{E}[Y_T|X_n]$$

ce qui donne que est $\sigma(X_n)$ mesurable et donc $V_n^\star = v_n(X_n)$ et l'équation pour le t.a. optimale $T^\star$ devient

$$T^\star = \inf\{n \geqslant 1 : v_n(X_n) = y_n(X_n)\} = \inf\{n \geqslant 1 : v_n(X_n) \geqslant \mathbb{E}[y_{n+1}(X_{n+1})|X_n]\}.$$

Dans le cas ou la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est indépendante on a en plus que le principe d'optimalité se simplifie en

$$v_n(X_n) = \max(y_n(X_n), \mathbb{E}[v_{n+1}(X_{n+1})|\mathcal{F}_n]) = \max(y_n(X_n), \mathbb{E}[v_{n+1}(X_{n+1})])$$

donc si on pose $c_{n+1} = \mathbb{E}[v_{n+1}(X_{n+1})]$ on a que l'arrêt est déterminé par la condition $y_n(X_n) \geqslant c_{n+1}$ et que c_n satisfait $c_n = \mathbb{E}[\max(y_n(X_n), c_{n+1})]$. Le t.a. $T^\star$ est donc donné par une condition de dépassement d'une seuil: c'est le premier instant où $Y_n \geqslant c_{n+1}$. On note que $V^\star = \mathbb{E}[V_1^\star] = c_1$.

Reprenons donc le problème de vendre un bien avec gain $Y_n = X_n - cn$. C'est un problème markovien avec une chaîne iid ou on a

Lemme 19. *Dans ce problème:* $v_n(x) = v_1(x) - c(n-1)$.

Démonstration. On peut démontrer cette formule de la façon suivante: soit T un temps d'arrêt $\geqslant n$ et qui dépends seulement des v.a. X_n, X_{n+1}, ... On peut écrire $T = t(X_n, X_{n+1}, \ldots) + n - 1$ ou t est une fonction mesurable $t : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ tel que $t \geqslant 1$. Alors

$$\mathbb{E}[Y_T|X_n = x] = \mathbb{E}[X_{n-1+t(X_n X_{n+1},\ldots)} - c(n-1) - c\,t(X_n, X_{n+1}, \ldots)|X_n = x]$$

par la propriété de Markov et l'homogénéité de la chaîne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ on a que pour tout fonction mesurable f:

$$\mathbb{E}[f(X_n, X_{n+1}, \ldots)|X_n = x] = \mathbb{E}[f(X_1, X_2, \ldots)|X_1 = x]$$

et donc

$$\mathbb{E}[Y_T|X_n=x]=\mathbb{E}[X_{t(X_1X_2,\ldots)}-c\,t(X_1,X_2,\ldots)|X_1=x]-c(n-1)=\mathbb{E}[Y_{T'}|X_1=x]-c(n-1)$$

où $T'=t(X_1,\,X_2,\,\ldots)$ est un temps d'arrêt $\geqslant 1$. Il est clair que pour tout t.a. $T'\geqslant 1$ il existe aussi un temps d'arrêt $T\geqslant n$ tel que

$$\mathbb{E}[Y_T|X_n=x]=\mathbb{E}[Y_{T'}|X_1=x]-c(n-1)$$

et donc que

$$\mathrm{esssup}_{T\geqslant n}\mathbb{E}[Y_T|X_n=x]=\mathrm{esssup}_{T'\geqslant 1}\mathbb{E}[Y_{T'}|X_1=x]-c(n-1)$$

ce qui donne la thèse. □

Le principe d'optimalité s'écrit sous la forme

$$V^\star=c_1=\mathbb{E}[\max(Y_1,c_2)]=\mathbb{E}[\max(X_1,c_1)]-c=\mathbb{E}[\max(X_1,V^\star)]-c$$

qui est la condition trouvé précédemment avec une démonstration plus compliquée.

Considérons maintenant le même problème avec le gain $\tilde{Y}_n=M_n-cn$ où $M_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\;X_k$. Ici on peut reconsidérer une des offres que on a reçu et non pas seulement la dernière. Le gain est une fonction du processus $(M_n)_{n\geqslant 1}$ qui est un processus de Markov: $M_{n+1}=(X_{n+1}-M_n)_++M_n$ et donc la loi de M_{n+1} dépends de $(M_1,\,\ldots,\,M_n)$ seulement par moyen de M_n. Ici donc

$$v_n(m)=\sup_{T\geqslant n}\mathbb{E}[\tilde{Y}_T|M_n=m]=\sup_{T\geqslant 1}\mathbb{E}[\tilde{Y}_T|M_1=m]-c\,(n-1)=v_1(m)-c(n-1)$$

le temps d'arrêt optimale $\tilde{T}^\star$ est donné par le premier instant où $y_n(M_n)=v_n(M_n)$ (avec $y_n(m)=m-cn$). On veut montrer que $\tilde{Y}_{\tilde{T}^\star}=Y_{\tilde{T}^\star}$. Sur l'événement $\{\tilde{T}^\star=n\}$ on a que $y_k(M_k)<v_k(M_k)$ pour tout $k<n$. Pour $k=n-1$ on a deux possibilités: soit $M_n>M_{n-1}$ soit $M_n=M_{n-1}$, dans ce deuxième cas $y_n(M_n)=y_n(M_{n-1})=y_{n-1}(M_{n-1})-c<v_{n-1}(M_{n-1})-c=v_n(M_{n-1})=v_n(M_n)$ ce qui est impossible. Donc on doit avoir $M_n>M_{n-1}$ ce qui implique que $M_n=X_n$. Donc $M_{\tilde{T}^\star}=X_{\tilde{T}^\star}$ et donc $\tilde{Y}_{\tilde{T}^\star}=Y_{\tilde{T}^\star}$. Mais alors le problème avec le maximum a le même gain moyen optimale du problème sans maximum, car pour tout t.a. T on a

$$\mathbb{E}[Y_{\tilde{T}^\star}]=\mathbb{E}[\tilde{Y}_{\tilde{T}^\star}]\geqslant\mathbb{E}[\tilde{Y}_T]\geqslant\mathbb{E}[Y_T]$$

et donc $\mathbb{E}[Y_{\tilde{T}^\star}]$ est le gain moyen optimale $V^\star$ qui satisfait $c=\mathbb{E}[(X-V^\star)_+]$.