Rattrapage 2009

Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Seule les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte. Si z_α est le quantiles de niveau α d'une loi normale centrée et réduite, on donne : $z_{0.8} = 0.841$, $z_{0.9} = 1.281$, $z_{0.95} = 1.645$, $z_{0.975} = 1.96$, $z_{0.99} = 2.326$.

Exercice 1. Soit (X, Y) le vecteur gaussien de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et de moyenne $(2, 1)$.

(a) Calculer $\mathbb{E}[(X-2)^2]$.

(b) Déterminer la loi de la v.a. $Z = 4 - X + 3Y$.

(c) Soit $W = X + Y$. Déterminer la moyenne et la matrice de covariance du couple (W, Z).

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de v.a. discrètes telles que $\mathbb{P}(X_n = k/n) = 1/n$ pour $k = 1, \dots, n$. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3. Soit $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$.

(a) Déterminer c tel que $\mathbb{P}(\frac{X}{2} - 1 \leq c) = 0.95$.

(b) Trouver α et β de façon telle que $(\alpha X + \beta)^2 \sim \chi^2_1$.

(c) Calculer $\mathrm{Var}[X^2]$.

(d) Calculer $\mathbb{E}[e^{2X}]$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des v.a.s telles que $X_n \sim \mathcal{P}(n)$ (la loi de Poisson de moyenne n). Soit $Y_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$.

(a) Ecrire X_n comme somme de n variables aleatoires iid.

(b) Calculer moyenne et variance de Y_n pour tout $n \geq 1$.

(c) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une gaussienne.

(d) Utiliser le résultat précèdent pour montrer que $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{n!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 5. Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Montrer que $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ est une statistique exhaustive pour le couple (μ, σ^2).

Exercice 6. Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi $\mathcal{U}([-2\theta, 0])$ avec $\theta > 0$. Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance pour θ.

Exercice 7. Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi $\mathcal{U}([a-b, a+b])$ avec $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer un estimateur (A_n, B_n) du couple (a, b) par méthode des moments.

(b) L'estimateur A_n de a est il asymptotiquement normale ? Pourquoi ?

(c) On suppose que $b = 2$. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique à niveau 95% pour a.

Exercice 8. On considère un échantillon de taille n de loi $\mathcal{N}(\mu, 4)$. Déterminer la région critique du test UPP à niveau $\alpha = 5\%$ pour $H_0 : \mu = 10$ contre $H_1 : \mu > 10$.

Exercice 9. Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi $\mathrm{Bin}(2, \theta)$ avec $\theta \in]0, 1[$. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique et symétrique de niveau 95% pour θ.