TD1. Problèmes d'arrêt optimale en horizon fini

Exercice 1. Problème de Moser

Résoudre le problème de Moser avec des gains $X_n \sim \mathcal{U}([0,\ 1])$ et décrire la stratégie optimale pour $N = 4$.

Exercice 2. Le problème du stationnement

Ce problème est du à MacQueen et Miller (1960). On conduit une voiture sur une voie infinie à la recherche d'une place de stationnement mais les places ne sont pas forcement toujours libres. L'objectif c'est de se garer le plus proche possible du théâtre sans pouvoir revenir en arrière. On voit une place libre à distance d du théâtre. Est-que on doit s'y garer?

On imagine un modèle discret. On part de l'origine et on voit des places de stationnement a tout point entiers sur la droite réelle. Soient $X_0, X_1, \ldots$ des Bernoulli iid de paramètre $p \in]0,\ 1[$ telles que $X_n = 1$ signifie que l'n-ème place est déjà occupé et $X_n = 0$ signifie que il est libre. Soit N la position du théâtre. On peut s'arrêter à la place n ssi $X_n = 0$ et si on décide de s'arrêter la on perd la quantité $|n - N|$. Quand on est à n on ne peut pas voir si la place $n + 1$ est libre et si on passe outre on ne peut plus revenir en arrière. Si on arrive à la place N et si elle n'est pas libre alors on va prendre la première place libre qui on trouve en continuant, dans ce cas la perte attendue est donnée par $(1 - p) + 2p(1 - p) + 3p^2(1 - p) + \cdots = 1/(1 - p)$.

1. Formuler le problème d'arrêt optimale: donner la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\ldots,N}$, les pertes $(Y_n)_{n=0,\ldots,N}$ et spécifier la définition d'optimalité pour un t.a. T.

2. Utiliser l'hypothèse d'indépendance des X_n et la forme spécifique des gains Y_n pour simplifier la forme de la fonction valeur Z et de la règle d'arrêt optimale associé.

3. Remarquer que la règle optimale est de la forme $T_r = \inf\{n \in [r, N]: X_n = 0\}$.

4. Montrer que la perte moyenne $C(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}]$ si on utilise T_r est donné par la formule

$$C(N - n) = n + 1 + \frac{2p^{n+1} - 1}{1 - p}, \qquad n = 0, \ldots, N$$

5. Trouver le r optimale en fonction de p et N pour $p = .9$.

Exercice 3. Une variation sur le problème de la princesse

Considérer le problème de la princesse avec la fonction de gain suivante:si on s'arrêt au temps n alors on gain $Y_n = 1$ si on choisit l'objet meilleur, $Y_n = -1$ si l'objet choisi n'est pas le meilleur. On se donne aussi la possibilité de ne pas choisir aucun des N objets dans quel cas notre gain est 0.

1. Donner une formule pour le gain Y_n pour $n = 1, \ldots, N$.

2. Observer que cette variante donne un gain qui est plus petit du gain dans le problème classique.

3. Montrer que une règle d'arrêt optimale est de la forme $T_r = \inf\{n \in [r, N]: X_n = 1\}$.

4. Soit r_* la valeur optimale de r. Montrer que $r_*/N \to 1/\sqrt{e}$ quand $N \to \infty$.