TD2. Propriété de Markov forte.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n, S_0 = 0$. Soit $T = \inf\{n \geqslant 0: S_n > 1\}$. Montrer que $\mathbb{P}(T \geqslant n) = 1/n!$ et que $\mathbb{E}[T] = e$, $\mathbb{E}[S_T] = e/2$.

Exercice 2. (Promenade aléatoire asymétrique). Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid avec $\mathbb{P}(X_n = +1) = p > 1/2$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $S_0 = 0$. Soit $\tau = \inf\{n \geqslant 0: S_n < 0\}$ et $Y = \inf_{n\geqslant 0} S_n$. Montrer que

1. $\mathbb{P}(\tau < +\infty) < 1$;

2. $\mathbb{P}(Y \leqslant -k) = \mathbb{P}(\tau < +\infty)^k$

3. Soit $T = \inf\{m \geq 0: S_m = 1\}$. Appliquer l'identité de Wald à $T \wedge n$ pour montrer que

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} = \frac{1}{2p - 1}.$$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid avec $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 < +\infty$. Si T est un t.a. intégrable montrer que

$$\mathbb{E}[S_T^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[T].$$

(Sugg.: Calculer $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}^2]$ par recurrence et montrer que $(S_{T\wedge n})_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.)

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite independent et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de t.a. intégrables et tels que $\mathbb{E}[T_n] \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[X_m 1_{X_m > \varepsilon m}] \to 0$$

quand $n \to +\infty$, alors

$$\frac{\mathbb{E}[X_{T_n}]}{\mathbb{E}[T_n]} \to 0.$$

(Sugg.: l'estimation est facile si $X_{T_n} \leqslant \varepsilon T_n$ ou si $T_n \leqslant N$ pour N fixé).

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid avec $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et $\mathbb{E}[X_n^2] = 1$. Soit $T_c = \inf\{n \geqslant 0: |S_n| > c\sqrt{n}\}$.

1. En utilisant l'exercice 3 montrer que $\mathbb{E}[T_c] = +\infty$ pour $c > 1$.

2. Montrer que pour tout $\tau = T_c \wedge n$ on a

$$\mathbb{E}[\tau] \leqslant c^2\, \mathbb{E}[\tau] + 2c\sqrt{\mathbb{E}[\tau]\, \mathbb{E}[X_\tau^2]} + \mathbb{E}[X_\tau^2].$$

3. Utiliser l'exercice 4 et cette inégalité pour montrer que $\mathbb{E}[T_c] < +\infty$ si $c < 1$.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états M et $A\subseteq M$. Soit

$$T_A^k=\inf\{n>T_A^{k-1}\colon X_n\in A\},\quad T_A^0=0.$$

1. Montrer que $Y_k = X_{T_A^k}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $P_A(x,\ y) = \mathbb{P}_x(X_{T_A^1}=y),\ x,y\in A$.

2. Montrer que $P_A(x,y)$ est la solution minimale de l'équation

$$P_A(x,y)=P(x,y)+\sum_{z\notin A} P(x,z)P_A(z,y).$$

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états M, $Y_n=X_{S_n}$ et

$$S_{m+1}=\inf\{n\geqslant S_m\colon X_n\neq X_{S_m}\}.$$

Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $\tilde{P}$ donnée par

$$\tilde{P}(x,x)=0,\qquad \tilde{P}(x,y)=\frac{P(x,y)}{\sum_{z\neq x}P(x,z)}\text{ pour } x\neq y.$$

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid avec $\mathbb{E}[(X_1)_+]<+\infty$ et $Y_n=\max_{1\leqslant m\leqslant n}X_m-c\,n$.

1. Soit $T=\inf\{n\geqslant 0\colon X_n>\alpha\}$ et $p=\mathbb{P}(X_n>\alpha)$. Calculer $\mathbb{E}[Y_T]$.

2. Soit α la solution de $\mathbb{E}[(X_1-\alpha)_+]=c$. Montrer que $\mathbb{E}[Y_T]=\alpha$ et utiliser le fait que

$$Y_n\leqslant\alpha+\sum_{m=1}^{n}((X_m-\alpha)_+-c)$$

pour prouver que si T est t.a. intégrable alors $\mathbb{E}[Y_T]\leqslant\alpha$.