TD5. Arrêt optimal

Exercice 1. (LE PROBLEME DE MOSER) Il s'agit du problème d'arrêt optimal suivant. Soient $X_1, ..., X_N$ des v.a. iid positives avec fonction de répartition F et moyenne $\mathbb{E}[X_i]$ finie. On imagine connaître la loi F. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ et $Y_n = X_n$: on observe en séquence N réalisations indépendantes de F, notre gain est la dernière valeur observée avant de s'arrêter. L'horizon est N: si nous ne nous arrêtons pas avant N on est obligé d'accepter le gain $Y_N = X_N$.

a) Montrer que la fonction valeur Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$ pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$ (sugg: utiliser que $Y_n \hat{\in} \sigma(X_n)$ et une recurrence retrograde)

b) Soit $V_n = \mathbb{E}[Z_n]$. Montrer que $V_n = \varphi(V_{n+1})$ où $\varphi(x) = \mathbb{E}[\sup(X_1, x)]$.

c) Montrer que φ est une fonction positive et croissante, telle que $\varphi(x) - x$ est decroissante et $\varphi(x) - x \to 0$ si $x \to +\infty$.

d) Montrer que une regle optimale est

$$T^\star = \inf\{k \leqslant N : X_k \geqslant V_{N-k}\}$$

e) Soit $X_i \sim \mathcal{U}([0,1])$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$ et $N = 6$. Montrer que la strategie optimale est donné par la procedure suivante: s'arrêter au temps 1 si $X_1 \geqslant 0.775$, s'arrêter au temps 2 si $X_2 \geqslant 0.742$, s'arrêter au temps 3 si $X_3 \geqslant 0.695$, s'arrêter au temps 4 si $X_2 \geqslant 0.625$, s'arrêter au temps 5 si $X_5 \geqslant 1/2$ ou s'arrêter à 6.

Exercice 2. (PROBLEME DE LA SECRETAIRE) Il s'agit de choisir parmi N objet le meilleur. On a le droit d'inspecter un objet à la fois et de décider de le choisir et donc s'arrêter ou de passer à l'inspection du suivant. Ce n'est pas possible de revenir sur ses propres pas: chaque fois on ne peut seulement garder que le dernier objet ou continuer. On veut déterminer une stratégie d'arrêt qui nous permet de maximiser la probabilité de choisir l'objet qui est le meilleur parmi les N à notre disposition. Ce problème porte le nom de « problème de la princesse » où, dans la littérature anglo-saxonne, problème classique de la secrétaire (CSP - classic secretary problem).

Le modèle mathématique est basé sur un espace d'états Ω donné par les possible permutations des N objets: $\omega \in \Omega$ est un vecteur $\omega \in \{1, ..., N\}^N$ tel que $\omega(i) \neq \omega(j)$ si $i \neq j$ pour tout $i, j = 1, ..., N$. Sur Ω on considère la distribution uniforme qui donne le même poids $1/N!$ à chaque permutation. La valeur $\omega(i)$ est le rang absolu de l'n-ème objet inspecté, donc si $\omega(i) = 1$ le meilleur objet se trouve dans la position i. On remarque qu'on ne peut pas observer directement les ω (on ne connaît pas le classement des objets jusqu'a ce qu'on ai inspecté tous les N objets). A chaque pas n on observe une variable $X_n(\omega)$ qui donne le rang *relatif* de l'n-ème objet inspecté par rapport à tous les $n-1$ objets inspectés auparavant. Donc $X_1 = 1$, $X_2 \in \{1, 2\}$,..., $X_n \in \{1, ..., n\}$ et $X_N(\omega) = \omega(N)$: une fois que j'ai inspecté tous les objets je connais leur classement absolu. A chaque instant n je connais $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ la tribu engendrée par le rangs relatifs des premiers n objets. Exemple: si $N = 4$ et $\omega = (3, 4, 1, 2)$ alors $X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 2, X_3(\omega) = 1$, $X_4(\omega) = 2$. Soit $\Xi = \{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{N}^N : 1 \leqslant x_k \leqslant k, k = 1, ..., N\}$ l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_N)$. On remarque que l'application $X : \Omega \to \Xi$ que envoie chaque possible permutation des N objet vers la correspondante suite des rangs relatifs est bijective, i.e. existe $\Psi : \Xi \to \Omega$ telle que $\Psi(X(\omega)) = \omega$. Ce qu'il est équivalent à dire que donné la suite des rangs relatifs $x_1, ..., x_N$ on peut reconstruire le valeurs de $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$.

a) Montrer que pour tout $(x_1, ..., x_N) \in \Xi$ on a

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N) = 1/N!$$

b) Monter que pour tout $n \leqslant N$ on a que $\mathbb{P}(X_n = j) = 1/n$ pour $j = 1, ..., n$ et que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.

c) L'objectif est de trouver une stratégie d'arrêt (donné par un t.a.) qui nous permet de optimiser la probabilité de choisir l'objet meilleur parmi les N disponibles. Autrement dit on veut maximiser $\mathbb{P}(\omega(T) = 1) = \mathbb{E}[1_{\omega(T)=1}]$ pour tout T t.a. de la filtration $\mathcal{F}$ et borné par N. On défini un processus adapté Y par $Y_k = \mathbb{E}[1_{\omega(k)=1}|\mathcal{F}_k] \in \mathcal{F}_k$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\omega(T) = 1) = \mathbb{E}[Y_T].$$

d) Montrer que $Y_n = 1_{X_n=1}\frac{n}{N}$ et donc que $Y_n \hat{\in} \sigma(X_n)$.

e) Montrer que $Z_n \hat{\in} \sigma(X_n)$ et donc que un temps d'arrêt optimal est donné par

$$T^\star = \inf\{k \leqslant N : \mathbb{E}(Z_{k+1}) \leqslant k/N, X_k = 1\}$$

f) Montrer que $\mathbb{E}[Z_n]$ est une fonction decroissante de n et donc que il existe r tel que

$$T^\star = T_r = \inf\{r \leqslant k \leqslant N : X_k = 1\} \cup \{N\}$$

g) Montrer que pour tout $1 \leqslant r \leqslant N$:

$$G_N(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}] = \mathbb{P}(\omega(T_r) = 1) = \frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^{N} \frac{1}{k-1}$$

h) Montrer que $\lim_{N\to\infty} G_N(xN) = -x \log x$ et que cette fonction à un maximum pour $x = 1/e \simeq 0.37$. Donc dans la limite d'un grand nombre d'objects la strategie optimale est de ne laisser defiler une proportion du 37% et apres choisir le premier meilleur de tout les precedents.