MIDO M1 MMD	**Université Paris-Dauphine**
Processus discrets	**10 décembre 2009**

Couplage d'une chaîne de Markov

I. Préliminaires

Soit X une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un espace d'état M dénombrable. Soit $f\colon M \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On appelle oscillation de f la quantité

$$\operatorname{Osc}(f) = \sup_{x,y\in M} |f(x) - f(y)| = \sup_M f - \inf_M f.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\rho_n = \sup_{f \text{ bornée}} \frac{\operatorname{Osc}(P^n f)}{\operatorname{Osc}(f)}.$$

1. Montrer que pour toust $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a $\rho_{n+m} \leq \rho_n \rho_m$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in M^2$ on a

$$|P^{n+m} f(x) - P^n f(x)| \leq \operatorname{Osc}(P^n f).$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ pour tous n et m et soit $\alpha = \inf_n \frac{u_n}{n}$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \to \alpha$.
Indication: on pourra fixer $\epsilon > 0$ et n_0 tel que $\frac{u_{n_0}}{n_0} \leq \alpha + \epsilon$, puis montrer en effectuant la division euclidienne de n par n_0, qu'on a $\frac{u_n}{n} \leq \alpha + 2\epsilon$ pour n assez grand.
4. En déduire que si $\inf_n \rho_n < 1$ alors $\rho_n \to 0$.

II. Couplage

On suppose maintenant qu'il existe une suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées, et $F\colon \mathbb{R} \times M \to M$ une fonction mesurable telles que X soit donnée par le système dynamique aléatoire

$$X_n = F(\theta_n, X_{n-1}).$$

On introduit une deuxième chaîne $Y_n = F(\theta_n, Y_{n-1})$ et le couple $Z = (X, Y)$. Enfin on pose $T = \inf\{n \geq 0,\ X_n = Y_n\}$, et on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\epsilon > 0$ tels que pour tout $(x, y) \in M^2$, on ait

$$\mathbb{P}_{(x,y)}(T \leq n_0) \geq \epsilon.$$

5. Montrer que Z est une chaine de Markov. Préciser son espace d'état et sa matrice de transition.
6. Montrer que presque sûrement $(\forall n \geq T)$ $(X_n = Y_n)$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x, y) \in M^2$, on a

$$|P_n f(x) - P_n f(y)| \leq \mathbb{P}_{(x,y)}(T > n) \operatorname{Osc}(f).$$

8. En déduire que $\rho_{n_0} \leq 1 - \epsilon$, puis que $\rho_n \to 0$.
9. Soit f une fonction bornée, montrer que $P^n f$ converge uniformément vers une constante qu'on appelle $c(f)$.
10. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité π telle que pour toute f bornée on ait $c(f) = \int f \,\mathrm{d}\pi$. Puis montrer que π est l'unique probabilité stationnaire de la chaîne.