Université Paris 9 - Dauphine

MD4 S1

Processus Aléatoires Discret

Examen du 1-9-2005

Aucun document permis. Durée 2 heures.

1. : Soit $\{Y_j\} j \geq 1$ une suite de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - P(Y_i = -1) = 1 - q$. Soit $S_n = \sum_{n=1}^n Y_i$.
   (a) Montrer que
   $$W_n = S_n - (2p-1)n, \qquad W_0 = 0$$
   $$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \qquad M_0 = 1$$
   sont des martingales par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n)\}_n$.
   (b) Montrer que pour tout temps d'arrêt borné
   $$\mathbb{E}\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{S_\nu}\right] = 1, \qquad \mathbb{E}[S_\nu] = (2p-1)(\nu). \tag{1}$$

2. Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ la tribu borelienne de Ω, $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{F}$. Soit K un entier positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par la partition $\{(jK^{-n}, (j+1)K^{-n}],\ j = 0, \ldots, K^n - 1\}$
   $$\mathcal{F}_n = \sigma\left\{(jK^{-n}, (j+1)K^{-n}],\ j = 0, \ldots, K^n - 1\right\}$$
   Soit α un nombre réel positif. On pose, pour tout $n \geq 0$
   $$X_n(\omega) = \begin{cases} \alpha^n & \text{si } 0 \leq \omega \leq K^{-n}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$
   (a) Montrer que $\{\mathcal{F}_n\}_n$ est une filtration croissante.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.
   (c) Pour quelle valeur de α on a que X_n est une martingale par rapport a cette filtration ?
   (d) Pour quelles valeurs de α on a que X_n est une sous-martingale ?
   (e) Calculer la limite presque sure de X_n pour $n \to \infty$.

3. (a) Soit M_n une martingale par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$, telle que $\mathbb{E}(M_n^2) < +\infty$. Soit
   $$A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left([M_i - M_{i-1}]^2 | \mathcal{F}_{i-1}\right)$$
   Montrer que $M_n^2 - A_n$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
   (b) Soit X_n une chaîne de Markov sur un espace M fini, avec matrice de transition P. Soit $f : M \to \mathbb{R}$.

i. Montrer que

$$M_n = f(X_n) - f(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1} [f(X_k) - (Pf)(X_k)]$$

est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)\}_{n \geq 0}$.

ii. Montrer que

$$M_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \left[(P(f^2))(X_k) - ((Pf)(X_k))^2\right]$$

est une $\mathcal{F}_n$-martingale.