Corrigé Examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independants. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène sur l'espace d'états $M=\mathbb{N}$ de matrice de transition

$$P(0,1)=1, \qquad P(x,x+1)=1-P(x,x-1)=p \quad \text{pour } x\geqslant 1$$

avec $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.

a) Calculer $\mathbb{P}_0(X_4=2)$.

b) Montrer que la chaîne est irréductible.

c) Est-elle fortement irréductible ?

d) Est-elle apériodique ?

e) Montrer que une mesure invariante pour P est donnée par

$$\mu(0)=1, \qquad \mu(x)=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{q}\right)^x \qquad \text{pour tout } x\geqslant 1.$$

f) Déterminer les valeurs de p pour lesquels la chaîne admet une probabilité invariante π et montrer que dans ce cas P est réversible par rapport à π et que π est la seule probabilité invariante.

g) Soit $T_0=\inf\{n>0: X_n=0\}$. Supposant que la chaîne est récurrente positive, calculer le temps moyen de retour à l'état 0 (c-à-d $\mathbb{E}_0[T_0]$) en fonction de p. En déduire que si $p\geqslant 1/2$ alors la chaîne n'est pas récurrente positive.

h) Soit $S_x=\inf\{n\geqslant 0: X_n=x\}$ et $u_N(x)=\mathbb{P}_x(S_0<S_N)$ pour $0\leqslant x\leqslant N$. Trouver l'équation satisfaite par $u_N(x)$ et montrer que u_N est donnée par

$$u_N(0)=1, \qquad u_N(x)=1-\frac{\sum_{k=0}^{x-1}(q/p)^k}{\sum_{k=0}^{N-1}(q/p)^k}, \quad 0<x\leqslant N.$$

i) Montrer que $\mathbb{P}_0(T_0<+\infty)\geqslant u_N(1)$ pour tout $N\geqslant 1$. Calculer $\limsup_N u_N(1)$ et en déduire que si $p\leqslant 1/2$ la chaîne est recurrente.

Solution. Pour tout $x\geqslant 0$ on a $P^h(x,x+h)=p^h$ pour tout $h\geqslant 1$ et $P^h(x,x-h)=q^h$ pour tout $1\leqslant h\leqslant x$ donc la chaîne est irréductible. Elle n'est pas fortement irréductible car dans ce cas il doit exister $n>0$ tel que pour tout $x,y\in\mathbb{N}$ on ait $P^n(x,y)>0$ mais $P^n(x,x+n+1)=0$. La chaîne n'est pas apériodique car $P^n(0,0)=0$ pour tout n impair et $P^n(0,0)>0$ pour tout n pair, donc $R(x)=\{2,4,\ldots\}$ et la période de 0 est 2. Si μ est une mesure invariante, alors $\mu=\mu P$. et donc $\mu(x)=p\mu(x-1)+(1-p)\,\mu(x+1)$ pour tout $x\geqslant 2$ et $\mu(1)=\mu(0)+q\mu(2)$. On vérifie facilement que $\mu(x)=(p/q)^x/p$ satisfait ces équations. La récurrence positive de la chaîne est équivalent au fait que $\sum_{x\geqslant 0}\mu(x)<+\infty$ car toutes les mesures invariantes sont proportionnelles et donc $\mathbb{E}_x[T_x]=\mu_x(y)=C_x\,\mu(y)$ pour tout état x récurrent. La condition de sommabilité de $\mu(y)$ donne que $\mathbb{E}_x[T_x]<+\infty$ si et seulement si $p<1/2$. Dans ce cas la probabilité invariante est donc $\pi=C\mu$ pour une certaine constante C. La condition de réversibilité est

$$\pi(x)\,P(x,x+1)=\pi(x+1)\,P(x+1,x), \qquad x\geqslant 0$$

qui est facilement vérifié car $\pi(x+1)/\pi(x) = \mu(x+1)/\mu(x) = (p/q) = P(x, x+1)/P(x+1, x)$ pour tout $x \geqslant 1$ et $\pi(1)/\pi(0) = 1/q = P(0,1)/P(1,0)$. On a que

$$\mathbb{E}_0[T_0] = \frac{1}{\pi(0)} = \frac{\sum_{x \geqslant 0} \mu(x)}{\mu(0)} = 1 + \frac{1}{p} \sum_{x \geqslant 1} \left(\frac{p}{q}\right)^x = 1 + \frac{1}{p} \frac{1-p}{1-2p} = \frac{p(1-2p)+1-p}{p(1-2p)} = \frac{1-2p^2}{p(1-2p)}$$

pour tout $p < 1/2$ et $+\infty$ si $p \geqslant 1/2$ donc la chaîne n'est pas récurrente positive si $p \geqslant 1/2$. La fonction $u_N(x)$ satisfait l'équation

$$u_N(x) = p\, u_N(x+1) + q\, u_N(x-1)$$

pour tout $0 < x < N$ avec les conditions au bords $u_N(0) = 1$ et $u_N(N) = 0$. Il est facile de voir que la fonction donnée c'est la seule à satisfaire ces équations. Donc si $q \neq p$

$$u_N(1) = 1 - \frac{1-(q/p)}{1-(q/p)^N}$$

On a aussi $\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = \mathbb{P}_1(S_0 < +\infty) \geqslant \mathbb{P}_1(S_0 < S_N) = u_N(1)$. Si $p \leqslant 1/2$ on a que $q/p \geqslant 1$ et donc $u_N(1) \to 1$ et $\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = 1$: 0 est recurrent.

Exercice 2. Soient définies des v.a. indépendantes X, ξ_1, ξ_2, ... telles que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \varepsilon_n^2)$ avec $\varepsilon_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $Y_n = X + \xi_n$ et

$$X_n = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n], \qquad n \geqslant 1$$

avec $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$. On peut voir X comme une quantité inconnue qu'on cherche à estimer. La v.a. Y_n est le résultat obtenu en mesurant X au temps n, la mesure étant brouillée par une erreur aléatoire. On suppose que les erreurs commises en temps différents sont indépendantes. Au temps n, notre meilleure estimation L^2 de X est donnée par X_n. On se pose la question de savoir si X_n converge vers X quand $n \to \infty$.

a) Montrer que le processus $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une martingale uniformement bornée dans L^2 (c-à-d $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$)

b) Montrer que la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ converge presque sûrement vers une variable X_∞ et que $X_\infty \in L^2$. La v.a. X_∞ représente notre meilleure prévision de X (au sens L^2) donnée par l'observation de toutes les v.a. $(Y_n)_{n \geqslant 1}$.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on a $\mathbb{E}[Z_n Y_i] = 0$ où la v.a. Z_n est définie par

$$Z_n = X - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} Y_k .$$

d) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ la v.a. Z_n est indépendante du vecteur $(Y_1, ..., Y_n)$ puis que $X_n = X - Z_n$.

e) Calculer $\mathbb{E}[(X - X_n)^2]$ et en deduire que $X_n \to X$ presque surement si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-2} = +\infty.$$

Donc si $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n^{-2} < +\infty$ il est impossible de déterminer la quantité inconnue X même avec un nombre infini d'observations.

Solution. Le processus est adapté et par les proprietés de l'esperance conditionnelle

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n])^2] \leqslant \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[X^2] < +\infty$$

donc la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformement bornée dans L^2 et donc dans L^1. La propriéte de martingale est facile à verifier: $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = X_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Par un resultat du cours une martingale uniformement bornée dans L^2 converge p.s. et dans L^2 vers un limite X_∞. Par un calcul on a que

$$\mathbb{E}[Z_n Y_i] = \mathbb{E}[Y_i X] - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} \mathbb{E}[Y_i Y_k]$$

mais $\mathbb{E}[Y_i\, X] = \mathbb{E}[(X + \xi_n) X] = \mathbb{E}[X^2]$ par independance, $\mathbb{E}[Y_i\, Y_k] = \mathbb{E}[(X + \xi_i)(X + \xi_k)] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[\xi_i \xi_k] = 1 + \varepsilon_k^2 \delta_{k,i}$ et donc

$$\mathbb{E}[Z_n Y_i] = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} + 1\right) = 0$$

La v.a. Z_n est une combination lineaire du vecteur Gaussien $(X, Y_1, \ldots, Y_n)$ et donc elle est Gaussienne et le fait que $\mathbb{E}[Z_n Y_i] = 0$ implique que Z_n est independante de toutes les $Y_1, \ldots, Y_n$ et de moyenne nulle. Donc

$$0 = \mathbb{E}[Z_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} Y_k|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} Y_k$$

ce qui donne une expression pour X_n:

$$X_n = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} Y_k = X - Z_n.$$

Or

$$Z_n = X - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} (X + \xi_k) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} X - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} \xi_k$$

et donc

$$\mathbb{E}[(X - X_n)^2] = \mathbb{E}[Z_n^2] = \frac{1}{(1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2})^2} \left(1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}\right) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}}$$

ce qui montre que $X \to X_n$ dans L^2 ssi $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} \to +\infty$.