

## TD2. Chaînes de Markov.

**Exercice 1.** On lance un dé de manière répétitive. Parmi les suites aléatoires suivantes, lesquelles sont des chaînes de Markov ? Donner leur matrice de transition.

- a)  $X_n$  : le plus grand résultat obtenu après  $n$  lancers.
- b)  $N_n$  : le nombre de 6 obtenus au bout de  $n$  lancers.
- c)  $C_n$  : nombre de lancers, à l'instant  $n$ , depuis le dernier 6.
- d)  $B_n = \sum_{k=0}^n N_k$ .

**Exercice 2.** On considère une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  homogène de matrice de transition  $P$ . Déterminer si les processus suivantes sont des chaînes de Markov et éventuellement préciser leur matrice de transition:

- a)  $W_n = X_{n+k}$ ,  $n \geq 0$  où  $k \in \mathbb{N}$  est fixé ;
- b)  $Y_n = X_{2n}$ ,  $n \geq 0$  ;
- c)  $Z_n = X_{T_n}$ ,  $n \geq 0$  où  $T_n = S_1 + \dots + S_n$ ,  $T_0 = 0$  et la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  est iid et à valeurs dans  $\mathbb{N} + 1$ .

**Exercice 3.** (PANNES ALÉATOIRES) Soit  $\{U_n\}_{n \geq 0}$  une suite iid à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, +\infty\}$ . La v.a.  $U_k$  s'interprète comme durée de vie d'une quelque machine (la  $k$ -ème) qui est remplacée par un autre (la  $k + 1$ -ème) dès qu'elle défaille. Au temps initial 0 la machine 1 est mise en service et elle dure jusqu'au temps  $U_1$ , subitement remplacée par la machine 2 que dure pour un intervalle de temps  $U_2$  et donc jusqu'au temps  $U_1 + U_2$  et ainsi de suite. On note  $X_n$  le temps de service de la machine en utilisation au temps  $n$ . Le processus  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  est un processus à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov homogène sur  $\mathbb{N}$  de matrice de transition

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(U_1 > x+1)}{\mathbb{P}(U_1 > x)} & \text{si } y = x + 1 ; \\ 1 - P(x, x+1) & \text{si } y = 0 ; \\ 0 & \text{autrement .} \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

**Exercice 4.** (L'URNE D'EHRENFEST) Dans un récipient divisé en deux enceintes par une paroi poreuse sont réparties  $N$  molécules de gaz. A chaque unité de temps une particule choisie au hasard change d'enceinte. (les particules sont choisies avec loi uniforme sur  $\{0, N\}$  et indépendamment à chaque instant de temps)

1. *Vision Microscopique:* L'état du système  $X_n$  à l'instant  $n$  est représenté par un vecteur  $(x^i) \in M = \{0, 1\}^N$  où la  $i$ -ème composante  $x^i$  vaut 1 ou 0 selon que la  $i$ -ème particule est dans la première ou la seconde enceinte.
  - a. Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov sur  $M$  et donner sa matrice de transition.
  - b. Écrire  $(X_n)_{n \geq 0}$  comme récurrence aléatoire.
  - c. Montrer que pour tout  $x, y \in M$  il existe  $n \geq 0$  tel que  $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0$ .

2. *Vision macroscopique*: Soit  $S_n$  le nombre de particules dans la première enceinte au temps  $n$ :  $S_n = \sum_{k=1}^N X_n^k$ .
- Montrer que  $S_n$  est une chaîne de Markov sur  $\{0, N\}$  et donner sa matrice de transition.
  - Écrire  $(S_n)_{n \geq 0}$  comme récurrence aléatoire.
  - Montrer que pour tout  $x, y \in \{0, N\}$  il existe  $n \geq 0$  tel que  $\mathbb{P}(S_n = y | S_0 = x) > 0$ .

**Exercice 5.** (RUINE DU JOUEUR) Deux joueurs  $A$  et  $B$  misent de façon répétée 1 euro et chaque fois la probabilité que  $A$  gagne est  $p \in ]0, 1[$ . Les jeux successifs sont indépendantes. Soit  $X_n$  la fortune du joueur  $A$  après  $n$  parties et soit  $a$  la fortune initiale de  $A$  et  $b$  celle de  $B$ . Le jeu termine de que un des joueurs perd tout sa fortune. On stipule que si un des joueurs perd sa fortune à l'instant  $n$  alors  $X_k = X_n$  pour tout  $k \geq n$ . Donc  $X_0 = a$  et le jeu termine de que  $X_n \in \{0, a + b\}$ . Soit  $T = \inf \{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ou } X_n = a + b\}$  la durée (aléatoire) du jeu. La probabilité que  $A$  gagne si sa fortune initiale est  $x$  on la note  $u(x) = \mathbb{P}(X_T = a + b, T < +\infty | X_0 = x)$ .

- Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov et déterminer son espace d'états  $M$  et sa matrice de transition  $P$ .
- Montrer que  $u(0) = 0$ ,  $u(a + b) = 1$  et

$$u(x) = pu(x + 1) + (1 - p)u(x - 1), \quad a < x < b.$$

- Déterminer  $u(x)$  et  $v(x) = \mathbb{P}(X_T = 0, T < +\infty | X_0 = x)$  et conclure que  $\mathbb{P}(T = +\infty | X_0 = x) = 1$  pour tout  $x \in M$ .
- Remarquer que dans le cas  $b = +\infty$  (joueur contre casino) et  $p = q$  (jeu équitable) on a que  $v(x) = 1$  et donc que un joueur perdra toujours...
- Soit  $m(x) = \mathbb{E}[T | X_0 = x]$  la durée moyenne du jeu si la fortune initiale de  $A$  est  $x$ . Montrer que  $m(x)$  satisfait la récurrence:

$$m(x) = 1 + pm(x + 1) + (1 - p)m(x - 1)$$

pour tout  $x \in ]0, a + b[$  avec conditions au bords  $m(0) = 0$  et  $m(a + b) = 0$ .

- Montrer que l'unique solution de cette récurrence est

$$m(x) = x(a + b - x).$$

- Conclure que dans le cas  $b = +\infty$  en moyenne il faut un temps infini pour être ruiné en jouant contre le banc.