TD3. Chaînes de Markov (II). Quelques solutions.

Exercice 1. (Modèle de Wright-Fischer) Ce modèle décrit l'évolution d'un ensemble de N chromosomes. On suppose qu'il y a 2 types de chromosomes, A et B, et on note X_n le nombre de chromosomes de type A présents à la génération n (il y en a donc $N - X_n$ de type B). Le modèle évolue de la façon suivante : chaque chromosome de la génération $n+1$ choisit au hasard et uniformément un chromosome parent dans la génération n, ceci indépendamment des autres chromosomes. Le chromosome fils a alors le même type que son chromosome parent.

1. Sachant que $X_n = i$, calculer la probabilité qu'un chromosome donné de la génération $n+1$ soit de type A. En déduire que la suite $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0, 1, ..., N\}$, de probabilité de transition

$$P(i,j) = \left(\begin{array}{c} N \\ j \end{array}\right)\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}, \forall i, j \in \{0, 1, ..., N\},$$

où $\left(\begin{array}{c} N \\ j \end{array}\right) = \frac{N!}{j!(N-j)!}$.

2. Cette matrice est-elle irréductible ?

3. Donnez deux exemples simples de probabilités stationnaires pour cette chaîne. En déduire qu'elle possède une infinité de probabilités stationnaires.

(Remarque: une probabilité π est stationnaire pour P si $\pi = \pi P$.)

Solution. On note $Z_{n,k}: \Omega \to \{A, B\}$ le type du chromosome k dans la génération n. On se donne une double suite $(K_{n,k})_{n \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant N}$ se v.a. iid uniformément distribué sur l'ensemble discret $\{1, ..., N\}$: le chromosome k dans la génération n hérite son type du chromosome $K_{n,k}$ dans la génération précédente $(n-1)$. Donc $Z_{n+1,k} = Z_{n, K_{n+1,k}}$, cela fixe de façon univoque l'évolutions des types des chromosomes dans la population. Si l'on note Z_n le vecteur aléatoire $(Z_{n,1}, ..., Z_{n,N}) \in \{A, B\}^N$ et $K_n = (K_{n,1}, ..., K_{n,N})$ on a que

$$Z_{n+1} = f(Z_n, K_n)$$

Par définition $X_n = \sum_{k=1}^N 1_{Z_{n,k} = A}$. On note que $X_0, ..., X_n$ sont mesurables par rapport à les v.a. $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et X_0 et que on peut supposer que Z_0 (et donc X_0) est indépendante de $(K_n)_{n \geqslant 1}$. Cela implique que

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) | K_n, ..., K_1, Z_0] = \varphi(Z_n)$$

où

$$\varphi(z_n) = \mathbb{E}[f(\sum_{k=1}^N 1_{z_{n, K_{n+1,k}} = A})] = \mathbb{E}[f(\sum_{k=1}^N 1_{z_{n, U_k} = A})]$$

avec des v.a. $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ iid uniformément distribué sur l'ensemble discret $\{1, ..., N\}$. La loi de la v.a. $R = \sum_{k=1}^N 1_{z_{n, U_k} = A}$ est facile da calculer: soit $r(z_n)$ le nombre de A dans le vecteur z_n, donc on voit facilement que

$$\mathbb{P}(R = p) = \binom{N}{p}\left(\frac{r(z_n)}{N}\right)^p\left(\frac{N - r(z_n)}{N}\right)^{N-p}$$

car pour avoir $R = p$ on doit choisir au hasard p chromosomes A dans un ensemble de $r(z_n)$ chromosomes A et $N - r(z_n)$ chromosomes B. Par conséquent

$$\varphi(z_n) = \sum_{p=0}^{N} f(p)\binom{N}{p}\left(\frac{r(z_n)}{N}\right)^p \left(\frac{N - r(z_n)}{N}\right)^{N-p}$$

et (a noter que $X_n = r(Z_n)$)

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|K_n, ..., K_1, Z_0] = \sum_{p=0}^{N} f(p)\binom{N}{p}\left(\frac{X_n}{N}\right)^p \left(\frac{N - X_n}{N}\right)^{N-p} = g(X_n).$$

Alors on a aussi que

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n, ..., X_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{n+1})|K_n, ..., K_1, Z_0]|X_n, ..., X_0]$$

$$= \mathbb{E}[g(X_n)||X_n, ..., X_0] = g(X_n)$$

et donc que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = \binom{N}{x_{n+1}}\left(\frac{x_n}{N}\right)^{x_{n+1}} \left(\frac{N - x_n}{N}\right)^{N - x_{n+1}} = P(x_n, x_{n+1})$$

donc $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P.

b) La matrice n'est pas irréductible car $P(0,0) = P(N,N) = 1$. En effet les classes de communications sont trois: $\{0\}, \{N\}, \{1, ..., N-1\}$ et seulement les premières deux sont fermées.

c) Deux probabilités invariantes sont donc

$$\pi_1 = (1, 0, ..., 0) \qquad \text{et} \qquad \pi_2 = (0, ..., 0, 1)$$

et toute combinaison convexe de ces deux probabilités est aussi invariante.

Exercice 2. Soit Θ une v.a. réelle à valeurs dans $[0,1]$ et $(U_n)_{n \geqslant 0}$ une suite iid uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante de Θ. Soit $X_n = 1_{U_n \leqslant \Theta}$ et $S_n = X_0 + \cdots + X_n$. Calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|S_0, ..., S_n)$ et montrer que $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov non homogène.

Solution. On a que pour tout $n \geqslant 0$ il existe une fonction mesurable et bijective f_n: $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $(S_0, ..., S_n) = f_n(X_0, ..., X_n)$ donc $\sigma(S_0, ..., S_n) = \sigma(X_0, ..., X_n)$ et

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|S_0, ..., S_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_0, ..., X_n) = \mathbb{P}(U_{n+1} \leqslant \Theta|X_0, ..., X_n).$$

Les v.a. X_0, ..., X_n sont discrètes, cela nous permet de calculer l'espérance conditionnelle de façon élémentaire: $\mathbb{P}(U_{n+1} \leqslant \Theta|X_0, ..., X_n) = \varphi(X_0, ..., X_n)$ avec

$$\varphi(x_0, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_0 = x_0, ..., X_n = x_n)$$

pour tout $(x_0, ..., x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$. Maintenant si l'on pose $s_k = x_0 + \cdots + x_k$ on a

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) = \mathbb{E}[\prod_{k=0}^{n} (x_k 1_{U_k \leqslant \Theta} + (1 - x_k) 1_{U_k > \Theta})]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\prod_{k=0}^{n} (x_k 1_{U_k \leqslant \Theta} + (1 - x_k) 1_{U_k > \Theta})|\Theta]] = \mathbb{E}[v(\Theta)]$$

où par indépendance du vecteur aléatoire $(\Theta, U_0, ..., U_n)$ on a que

$$v(\theta) = \mathbb{E}[\prod_{k=0}^{n} (x_k 1_{U_k \leqslant \theta} + (1-x_k) 1_{U_k > \theta})] = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{E}[(x_k 1_{U_k \leqslant \theta} + (1-x_k) 1_{U_k > \theta})]$$

$$= \prod_{k=0}^{n} (x_k \theta + (1-x_k)(1-\theta)) = \theta^{s_n}(1-\theta)^{n-s_n}$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1 | S_0 = s_0, ..., S_n = s_n) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n, X_{n+1} = 1)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n)}$$

$$= \frac{\mathbb{E}[\Theta^{s_n+1}(1-\Theta)^{n-s_n}]}{\mathbb{E}[\Theta^{s_n}(1-\Theta)^{n-s_n}]}$$

Le fait que cette quantité ne dépends que de implique immédiatement la propriété de Markov:

$$g_n(s_n) = \mathbb{P}(X_{n+1}=1 | S_0 = s_0, ..., S_n = s_n) = \mathbb{P}(X_{n+1}=1 | S_n = s_n).$$

En effet

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1 | S_n = s_n) = \sum_{s_0, ..., s_{n-1}} \mathbb{P}(X_{n+1}=1, S_0 = s_0, ..., S_{n-1} = s_{n-1} | S_n = s_n)$$

$$= \sum_{s_0, ..., s_{n-1}} \mathbb{P}(X_{n+1}=1 | S_0 = s_0, ..., S_n = s_n) \mathbb{P}(S_0 = s_0, ..., S_{n-1} = s_{n-1} | S_n = s_n)$$

$$= g_n(s_n) \sum_{s_0, ..., s_{n-1}} \mathbb{P}(S_0 = s_0, ..., S_{n-1} = s_{n-1} | S_n = s_n) = g(s_n) \mathbb{P}(\Omega | S_n = s_n) = g_n(s_n).$$

La matrice de transition est

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_n = x) = P_n(x, y) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } y = x+1 \\ 1 - g_n(x) & \text{si } y = x \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et elle dépends explicitent du temps.

Exercice 3. Des catastrophes se produisent à des temps T_1, T_2, ... où $T_i = X_1 + X_2 + ... + X_i$ et les X_i's sont des variables aléatoires i.i.d., positives, d'espérance finie et non nulle.

a) Montrer que le processus $(T_i, i \geq 1)$ est une chaîne de Markov.

Soit $N(t) = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}}$ le nombre de catastrophes arrivées avant l'instant t. Montrer que lorsque $t \to \infty$:

b) $N(t) \to \infty$ presque sûrement.

c) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{E[X_1]}$ presque sûrement.

Solution. a) On peut écrire $T_{n+1} = T_n + X_n$ et $T_0 = 0$. Donc $(T_n)_{n \geqslant 0}$ est une récurrence aléatoire car la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est iid. Cela implique directement que $(T_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène.

b) Par la loi des grandes nombres on a que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{n} = \mathbb{E}[X_1] = c > 0 \qquad \mathbb{P} - p.s.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε (aléatoire) tel que

$$\mathbb{P}(T_n \leqslant (c+\varepsilon) n \,\text{pour tout}\, n > N_\varepsilon) = 1$$

mais donc il existe $S_\varepsilon > 0$ aléatoire tel que

$$\mathbb{P}(T_n \leqslant (c+\varepsilon) n \,\text{pour tout}\, n > N_\varepsilon) = \mathbb{P}(N(t) \geqslant t/(c+\varepsilon) \,\text{pour tout}\, t > S_\varepsilon)$$

$$\leqslant \mathbb{P}(\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \geqslant \frac{1}{c-\varepsilon})$$

et donc $N(t) \to +\infty$ presque sûrement.

c) Par l'argument précèdent on a aussi que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \geqslant \frac{1}{c-\varepsilon} \qquad p.s.$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Par un argument similaire on trouve

$$\limsup_{t->\infty} \frac{N(t)}{t} \leqslant \frac{1}{c+\varepsilon} \qquad p.s.$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Donc on vient de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{c} \qquad p.s.$$

Exercice 4. Soit $N_y = \sum_{n\geqslant 0} 1_{X_n = y}$ et $T_x = \inf\{n > 0 \colon X_n = x\}$. Montrer que la loi de N_y sous $\mathbb{P}_x$ est

$$\mathbb{P}_x(N_y = r) = \begin{cases} f_{xy} f_{yy}^{r-1}(1 - f_{yy}) & \text{si } r \geqslant 1 \\ 1 - f_{xy} & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

où $f_{xy} = \mathbb{P}_x(T_y < +\infty)$ est la probabilité de repasser par y en démarrant de x.

Solution. (Voir le polycopié du cours)

Exercice 5. (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p \in (0,1)$. On définit pour tout $n \geqslant 1$: $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $A_n = \{S_n = 0\}$.

a) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ (distinguer les cas pairs et impairs).

b) Que représente l'événement $\overline{\lim}\, A_n := \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n$?

c) Montrer que $\mathbb{P}(\overline{\lim}\, A_n) = 0$ lorsque $p \neq \frac{1}{2}$,

   i. en utilisant le lemme de Borel-Cantelli

   ii. en utilisant la loi forte des grands nombres.

d) Montrer que $(S_n, n \geq 1)$ est une chaîne de Markov. Préciser sa matrice de transition.

e) On considère $T_1 := \inf\{n \geqslant 1 : S_n = 0\}$ le premier instant où S touche 0, puis, $\forall\ i \geq 2$, $T_i := \inf\{n \geqslant T_{i-1}+1 : S_n = 0\}$, le $i$ème temps de retour en 0 (par convention, $\inf \emptyset = +\infty$). On admet que pour tout $i \geq 1$, le processus $(S_{T_i+n}, n \geq 1)$ a même loi que $(S_n, n \geq 1)$.

   i. En déduire que T_i est la somme de i variables aléatoires i.i.d., de même loi que T_1.

   ii. Soit $N(0) := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{S_n=0}$ le nombre de passages de S en 0. Montrer que

$$\mathbb{P}(N(0) = i) = (1 - \mathbb{P}(T_1 < \infty))\mathbb{P}(T_1 < \infty)^i, \ \forall i \geq 1.$$

   iii. En déduire que $\mathbb{P}(N(0) < \infty)$ est soit égale à 0 soit 1 et que

$$\mathbb{P}(N(0) < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(T_1 < \infty) < 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}[N(0)] < \infty.$$

f) On suppose ici que $p = 0.5$. L'objectif est de montrer que $\mathbb{P}(\overline{\lim}\, A_n) = 1$.

   i. Trouver un équivalent de $\mathbb{P}(A_{2n})$ à l'aide de la formule de Stirling : $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$.

   ii. En déduire que $E[N(0)] = \infty$ et conclure.

Solution. a) Si n est impair $\mathbb{P}(A_n) = 0$, par contre si n est pair

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\#\{1 \leqslant k \leqslant n : X_k = 1\} = n/2) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n/2} = \frac{n!}{((n/2)!)^2}[p(1-p)]^{n/2}$$

Par Strirling on a

$$\mathbb{P}(A_{2n}) = \frac{2^{2n} n^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n}(1 + o(1))[p(1-p)]^{n/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1 + o(1))[4p(1-p)]^n$$

b)

$$\begin{aligned}\operatorname*{limsup}_n A_n &= \{\forall k \geqslant 1 \text{ on a que il existe } n \geqslant k \text{ tel que } S_n = 0\} \\ &= \{S_{2n} = 0 \text{ infiniment souvent}\}\end{aligned}$$

c.i) [avec Borel-Cantelli] On a

$$\mathbb{E}[\sum_{n \geqslant 1} 1_{A_{2n}}] = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(A_{2n}) \leqslant C \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}[4p(1-p)]^n$$

où la constante C est donnée par $C = \sup_n \sqrt{\pi n}\mathbb{P}(A_n)/[4p(1-p)]^n \in]0, +\infty[$. Donc si $p \neq 1/2$ on a $4p(1-p) < 1$ et la série est convergente. Cela implique que $\mathbb{E}[\sum_{n \geqslant 1} 1_{A_{2n}}] < +\infty$ et que $\sum_{n \geqslant 1} 1_{A_{2n}} < +\infty$ presque sûrement. Donc $\mathbb{P}(A_n$ infiniment souvant$) = 0$ car pour avoir la somme $\sum_{n \geqslant 1} 1_{A_{2n}}$ finie il faut que seulement un nombre fini d'élément soient différents de 0.

c.ii) [avec la loi des grandes nombres] Par la LGN on a que

$$\lim_n \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1] = 2\,p - 1 \neq 0 \qquad \text{presque surement.}$$

Donc pour tout $\varepsilon \in]0, 2\,p - 1[$ il existe une v.a. $N_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > N_\varepsilon$ on a $|S_n| \geqslant (2p - 1 - \varepsilon)n > 0$ avec probabilité 1. Mais alors $\#\{n : S_n = 0\} \leqslant N_\varepsilon$ et donc

$$\mathbb{P}(A_n \,\text{infiniment souvent}) = 1 - \mathbb{P}(\#\{n : S_n = 0\} < +\infty) \leqslant 1 - \mathbb{P}(N_\varepsilon < +\infty) = 0.$$

d) On peut écrire $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et $S_0 = 0$. La suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est une récurrence aléatoire car $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est iid. Par conséquent, elle est aussi une chaîne de Markov. La matrice de transition est donnée par

$$P(x,y) = \mathbb{P}(y = x + X_1) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = x-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

e.i) Soit $\tilde{S}_n = S_{T_1+n}$. Par hypothèse le processus $(\tilde{S}_n)_{n \geqslant 0}$ a la même loi que $(S_n)_{n \geqslant 0}$. Soient $\tilde{T}_i := \inf \{n \geqslant \tilde{T}_{i-1} + 1 : \tilde{S}_n = 0\}$ avec $\tilde{T}_0 = 0$.

$$\mathbb{P}(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \ldots, T_n = t_n) = \mathbb{P}(T_1 = t_1, \tilde{T}_1 = t_2 - t_1, \ldots, \tilde{T}_{n-1} = t_n - t_1)$$

$$= \mathbb{P}(T_1 = t_1, \tilde{T}_1 = t_2 - t_1, \ldots, \tilde{T}_{n-1} = t_n - t_1, S_{t_1} = 0)$$

$$= \mathbb{P}(\tilde{T}_1 = t_2 - t_1, \ldots, \tilde{T}_{n-1} = t_n - t_1 | \tilde{S}_0 = 0, T_1 = t_1) \mathbb{P}(S_{t_1} = 0, T_1 = t_1)$$

(par Markov on obtient:)

$$= \mathbb{P}(\tilde{T}_1 = t_2, \ldots, \tilde{T}_{n-1} = t_n | \tilde{S}_0 = 0) \mathbb{P}(T_1 = t_1)$$

$$= \mathbb{P}(\tilde{T}_1 = t_2, \ldots, \tilde{T}_{n-1} = t_n | \tilde{S}_0 = 0) \mathbb{P}(T_1 = t_1)$$

(par l'hypothèse sur la loi de $\tilde{S}$:)

$$= \mathbb{P}(T_1 = t_2 - t_1, \ldots, T_{n-1} = t_n - t_1) \mathbb{P}(T_1 = t_1)$$

Soit $f(n) = \mathbb{P}(T_1 = n)$, $s_{k+1} = s_k + t_{k+1}$ et $s_0 = 0$. Par récurrence:

$$\mathbb{P}(T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n) = f(t_1) f(t_2 - s_1) \cdots f(t_n - s_{n-1}).$$

e.ii) Par ce que on vient de montrer

$$\mathbb{P}(N(0) \geqslant i) = \mathbb{P}(T_1 < +\infty, \ldots, T_i < +\infty)$$

$$= \sum_{t_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{t_i=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 = t_1, T_2 = t_1 + t_2, \ldots, T_n = t_1 + \cdots + t_n)$$

$$= \sum_{t_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{t_i=1}^{\infty} f(t_1) \cdots f(t_i) = \left(\sum_{t=1}^{\infty} f(t) \right)^i = \mathbb{P}(T_1 < \infty)^i$$

et donc

$$\mathbb{P}(N(0) = i) = (1 - \mathbb{P}(T_1 < \infty)) \mathbb{P}(T_1 < \infty)^i.$$

Maintenant

$$\mathbb{P}(N(0) = +\infty) = \lim_K \mathbb{P}(N(0) \geqslant K) = \lim_K \mathbb{P}(T_1 < +\infty)^K \in \{0, 1\}.$$

Si $\mathbb{P}(N(0) < \infty) = 1$ alors forcement $\mathbb{P}(T_1 < +\infty) < 1$ et donc $\mathbb{E}[N(0)] = 1/(1 - \mathbb{P}(T_1 < +\infty)) < +\infty$. D'autre part si $\mathbb{P}(N(0) < \infty) = 0$ alors $\mathbb{P}(T_1 < +\infty) = 1$ et aussi $\mathbb{E}[N(0)] = +\infty$. On a prouve que

$$\mathbb{P}(N(0) < \infty) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(T_1 < +\infty) < 1 \Rightarrow \mathbb{E}[N(0)] < +\infty$$

et aussi que

$$\mathbb{P}(N(0)<\infty)=0 \Rightarrow \mathbb{P}(T_1<+\infty)=1 \Rightarrow \mathbb{E}[N(0)]=+\infty$$

Alors si $\mathbb{E}[N(0)] = +\infty$ on doit forcement avoir $\mathbb{P}(T_1 < +\infty) = 1$ ce que forcement implique $\mathbb{P}(N(0)<\infty)<1$. On peut conclure que

$$\mathbb{P}(N(0)<\infty)=1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(T_1<+\infty)<1 \Leftrightarrow \mathbb{E}[N(0)]<+\infty$$

et aussi que

$$\mathbb{P}(N(0)<\infty)=0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(T_1<+\infty)=1 \Leftrightarrow \mathbb{E}[N(0)]=+\infty.$$

f) Dans le cas $p=1/2$ on a

$$\mathbb{P}(A_{2n})=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1))$$

et

$$\mathbb{E}[N(0)]=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[1_{S_{2n}=0}]=\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(A_{2n})=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1))=+\infty$$

mais alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n)=\mathbb{P}(N(0)=+\infty)=1$.

Exercice 6. (Etats récurrents d'une chaîne de Markov) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un espace dénombrable d'états M. Soit $y\in M$ et soit $T_y=\inf\{k\geq 1: X_k=y\}$. On pose

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \mathbb{P}_x(T_y<+\infty)=\mathbb{P}_x(\exists n\geqslant 1: X_n=y) \qquad x\neq y\\ \theta(y) &= 1\end{aligned}$$

a) Montrer que $\theta(x)$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned}\sum_{z\in M}P(x,z)\theta(z) &= \theta(x) \qquad x\neq y\\ \theta(y) &= 1\end{aligned} \tag{1}$$

b) Montrer que si on pose $\tilde{\theta}(x)=\mathbb{P}_x(T_y<\infty)$ pour tout $x\in M$, alors $\tilde{\theta}$ satisfait l'inégalité

$$\sum_{z\in M}P(x,z)\tilde{\theta}(z)\leq\tilde{\theta}(x) \qquad \forall x\in M$$

c) En déduire que si $\{\theta(x)=1,\forall x\in M\}$ est la seule solution de l'équation (1), alors y est un état récurrent.

Solution. a) Si $x\neq y$ alors

$$\theta(x)=\mathbb{P}_x(\exists n\geqslant 1: X_n=y)=\sum_z \mathbb{P}_x(\exists n\geqslant 1: X_n=y, X_1=z)$$

$$=\sum_{z\neq y}\mathbb{P}_x(\exists n\geqslant 2: X_n=y|X_1=z)\mathbb{P}_x(X_1=z)+P(x,y)$$

$$=\sum_{z\neq y}P(x,z)\mathbb{P}_z(\exists n\geqslant 1: X_n=y)+P(x,y)=\sum_z P(x,z)\theta(z).$$

b) Soit $x \neq y$ alors

$$\tilde{\theta}(x) = \theta(x) = \sum_z P(x,z)\theta(z) = \sum_{z \neq y} P(x,z)\tilde{\theta}(z) + P(x,y) \geqslant \sum_z P(x,z)\tilde{\theta}(z).$$

et aussi

$$\sum_{z \in M} P(y,z)\tilde{\theta}(z) = \mathbb{P}_y(\exists n \geqslant 2 \colon X_n = y) \leqslant \mathbb{P}_y(\exists n \geqslant 1 \colon X_n = y) = \tilde{\theta}(y).$$

c) On a que

$$\tilde{\theta}(y) \geqslant \sum_{z \in M} P(y,z)\tilde{\theta}(z) = \sum_{z \neq y} P(y,z)\theta(z) + P(y,y)\tilde{\theta}(y)$$

$$= \sum_{z \neq y} P(y,z) + P(y,y)\tilde{\theta}(y) = 1 - P(y,y) + P(y,y)\tilde{\theta}(y)$$

et donc $1 - \tilde{\theta}(y) \leqslant 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\theta}(y) = 1$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition donnée par

$$P(0,1) = 1, \qquad P(x,x-1) + P(x,x+1) = 1, \quad P(x,x+1) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 P(x,x-1),\, x \geqslant 1$$

Montrer que si $X_0 = 0$ alors la probabilité que $X_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$ est $6/\pi^2$.

Solution. On remarque d'abord que

$$\mathbb{P}_0(\forall n \geqslant 1 \colon X_n \geqslant 1) = \mathbb{P}_1(\forall n \geqslant 0 \colon X_n \neq 0).$$

Fixons $N \in \mathbb{N}$ et soit $T = \inf\{n \geqslant 1 \colon X_n = 0 \,\text{ou}\, X_n = N\}$. Alors la fonction $f_N(x) = \mathbb{P}_x(T_0 < T_N)$ est solution de

$$f_N(x) = \sum_{z \neq 0,N} P(x,z) f_N(z) + P(x,0)$$

Pour $f(1)$ on a

$$f_N(1) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} f_N(2) \Rightarrow f_N(2) - f_N(1) = \frac{1}{4}(f_N(1) - 1)$$

Et si $1 < x < N - 1$ on a que

$$f_N(x) = P(x,x+1) f_N(x+1) + P(x,x-1) f_N(x-1)$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + x^2} f_N(x+1) + \frac{(x)^2}{(x+1)^2 + x^2} f_N(x-1)$$

qui donne

$$f_N(x+1) - f_N(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}(f_N(x) - f_N(x-1))$$

$$= \prod_{k=2}^{x} \frac{k^2}{(k+1)^2}(f_N(2) - f_N(1)) = \frac{1}{(x+1)^2}(f_N(1) - 1)$$

et donc

$$f_N(x+1) = \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{(k+1)^2}(f_N(1) - 1) + f_N(1) = 1 + \sum_{k=0}^{x} \frac{1}{(k+1)^2}(f_N(1) - 1)$$

On a aussi

$$f_N(N-1) = \frac{(N-1)^2}{(N)^2 + (N-1)^2} f_N(N-2)$$

qui donne

$$N^2 f_N(N-1) = (N-1)^2 (f_N(N-2) - f_N(N-1)) = (f_N(1) - 1)$$

Alors $f_N(N-1) \to 0$ quand $N \to +\infty$ et

$$0 = \lim_{N \to +\infty} f_N(N-1) = \frac{1}{2} \lim_{N \to +\infty} f_N(N-2) = \frac{1}{2} \lim_{N \to +\infty} \left[1 + \sum_{k=0}^{N-3} \frac{1}{(k+1)^2} (f_N(1) - 1) \right]$$

Si on pose $f(1) = \lim_N f_N(1)$ à la limite on obtient

$$\lim_N f_N(1) - 1 = -\frac{1}{\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}} \Rightarrow \mathbb{P}_1(\forall n : X_n \geqslant 1) = 1 - f(1) = \frac{1}{\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Exercice 8. Soit Y_n une suite i.i.d. avec loi $P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = 0) = 1 - p$. Soit $X_n = \inf \{i \geq 0;\ Y_{n-i} = 0\}$, soit le nombre consécutifs de 1 avant n.

a) Montrer que X_n est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

b) Montrer que X_n est irréductible et calculer sa probabilité stationnaire. Y-a-t-'il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne ?

Solution. a) On a que $X_n = f(X_{n-1}, Y_n)$ où

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } y = 1 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

et $X_1 = 1_{Y_1 = 1}$. Donc la suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une récurrence aléatoire car $(Y_n)_{n \geqslant 2}$ est une suite iid indépendante de X_1. Cela suffit pour montrer que $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une chaîne de Markov homogène. La matrice de transition est

$$P(x, x') = \mathbb{P}(f(x, Y_1) = x') = \begin{cases} p & \text{si } x' = x + 1 \\ 1 - p & \text{si } x' = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}.$$

b) Si $x - x' = n > 0$ on a que

$$P^n(x, x') \geqslant P(x, x+1) P(x+1, x+2) \cdots P(x+n-1, x') = p^n > 0.$$

Si $x' < x$ on a que

$$P^{x'+1}(x, x') \geqslant P(x, 0) P(0, 1) \cdots P(x'-1, x') = (1-p) p^{x'} > 0$$

Donc $x \leftrightarrow x'$ pour tout $x, x' \in \mathbb{N}$ et la chaîne est irréductible car il existe une seule classe de communication. La probabilité stationnaire π satisfait l'équation $\pi(x) = \pi(x-1) p$ pour tout $x > 0$ et

$$\pi(0) = \sum_{x \geqslant 0} \pi(x) P(x, 0) = (1-p) \sum_{x \geqslant 0} \pi(x) = (1-p)$$

donc $\pi(x) = (1-p) p^x$: la loi géométrique de paramètre $1 - p$. La chaîne est irréductible, donc il n'existent pas d'autres probabilités stationnaires.

Exercice 9. (Transmission d'un message). Un message codé de façon binaire est transmis à travers un réseau. Chaque bit est transmis avec probabilité d'erreur:

- égale à a pour un passage de 0 à 1 ($a \neq 0$ et 1),
- égale à b pour un passage de 1 à 0 ($b \neq 0$ et 1),

Le résultat de la transmission au n-éme relais est noté X_n. On suppose que les relais se comportent indépendamment les uns des autres et que les erreurs sur les bits sont indépendantes. On souhaite calculer la taille critique du réseau au delà de laquelle la probabilité de recevoir un message erroné est supérieure à ϵ.

a) À l'aide de deux suites de Bernoulli $(U_n)_n$ et (V_n) indépendantes de probabilité de succès a et b respectivement, écrire X_n comme une suite récurrente aléatoire.

b) Soit $g_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Montrer que

$$g_{n+1} = (1-a)g_n + b(1-g_n)$$

et calculer g_n en fonction de g_0.

c) Calculer

$$r_n(0) = \mathbb{P}(\text{le message } X_n \text{ ne soit pas erroné} | X_0 = 0)$$

et

$$r_n(1) = \mathbb{P}(\text{le message } X_n \text{ ne soit pas erroné} | X_0 = 1)$$

d) Supposons maintenant de envoyer un message de longueur l (l bits) $X_0 = (X_0^1, \ldots, X_0^l)$. Alors $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^l)$ sont indépendantes avec la même loi. Soit r_n la probabilité pour que le message X_n ne soit pas erroné. Montrer que

$$r_n \geq [\alpha + (1-\alpha)(1-a-b)^n]^l \qquad \text{où } \alpha = \inf\left\{\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right\}$$

en déduire la taille maximale du réseau n_c pour avoir $r_n \geq 1-\epsilon$.

e) Déterminer Π^n et les mesures invariantes éventuelles.

f) Soit, pour $x,\ y \in \{0,\ 1\}$, $N_n(x,\ y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k = y\}}\right]$. Calculer $N_n(x,\ y)$ puis $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x,y)}{n}$.

Solution. a) La récurrence aléatoire associé à la chaîne peut s'écrire :

$$X_{n+1} = 1_{X_n=0, U_{n+1}=1} + 1_{X_n=1, V_{n+1}=0}\,.$$

b) Soit $g_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ alors par la propriété de Markov on a

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1}=0) = \mathbb{P}(X_{n+1}=0, X_n=0) + \mathbb{P}(X_{n+1}=0, X_n=1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1}=0 | X_n=0) g_n + \mathbb{P}(X_{n+1}=0 | X_n=1)(1-g_n) \\ &= (1-a)\, g_n + b\,(1-g_n) = (1-a-b)\, g_n + b \end{aligned}$$

Donc si $\gamma = (1-a-b)$ on a $g_1 = \gamma g_0 + b,\ g_2 = \gamma g_1 + b = \gamma^2 g_0 + \gamma b + b$ et en général

$$g_n = \gamma^n g_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k b = \gamma^n g_0 + \frac{1-\gamma^n}{1-\gamma} b = \gamma^n (g_0 - \frac{b}{a+b}) + \frac{b}{a+b}$$

On a aussi $r_n(0) = \gamma^n + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k b$ et $r_n(1) = \gamma^n + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k a$ car les rôle de a et b sont échangés dans le deuxième cas. La probabilité que chaque bit n'est pas erroné est alors

$$\mathbb{P}(X_n^i = X_0^i) = \sum_x \mathbb{P}(X_n^i = x | X_0^i = x)\mathbb{P}(X_0^i = x) = \sum_{x=0,1} r_n(x)\mathbb{P}(X_0^i = x) \geqslant \min(r_n(0), r_n(1))$$

$$= \gamma^n (1-\alpha) + \alpha$$

où $\alpha = \min(a,b)/(a+b)$. Et donc la probabilité que le message de l bits n'est pas erroné est

$$r_n \geqslant [\gamma^n (1-\alpha) + \alpha]^l$$

La taille du réseau doit être inférieure de

$$n_c = \frac{\log(1-\alpha) - \log((1-\varepsilon)^{1/l} - \alpha)}{-\log(\gamma)}.$$

e) La matrice de transmission est

$$\Pi^n(x,x) = r_n(x) = \begin{cases} \gamma^n (1 - b/(a+b)) + b/(a+b) & \text{si } x = 0 \\ \gamma^n (1 - a/(a+b)) + a/(a+b) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

et donc $\Pi^n(x, 1-x) = 1 - \Pi^n(x,x)$. On peut vérifier que

$$\pi = (b/(a+b), a/(a+b))$$

est la seule mesure invariante de Π. (la chaîne est irréductible).

f)

$$N_n(0,0) = \sum_{k=1}^n \Pi^k(0,0) = \sum_{k=1}^n [\gamma^k (1 - b/(a+b)) + b/(a+b)] = \sum_{k=1}^n \gamma^k (1 - \frac{b}{a+b}) + n\frac{b}{a+b}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(0,0)}{n} = \frac{b}{a+b} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(1,0)}{n}$$

et de façon similaire on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(0,1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(1,1)}{n} = \frac{a}{a+b}.$$