Corrigé TD4. Chaînes de Markov (III).

Exercice 1. Soit Y_n une suite i.i.d. avec loi $P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = 0) = 1 - p$. Soit $X_n = \inf \{i \geq 0;\ Y_{n-i} = 0\}$, soit le nombre consécutifs de 1 avant n.

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

2. Montrer que X_n est irréductible et calculer sa probabilité stationnaire. Y-a-t-'il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne ?

Solution. On a $X_0 = 1_{Y_0=1}$ et $X_{n+1} = (X_n + 1)1_{Y_{n+1}=1}$. Il s'agit d'une récurrence aléatoire et donc la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est bien une chaîne de Markov. Elle est aussi homogène car

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \mathbb{P}((1 + x)1_{Y_{n+1}=1} = y)\mathbb{P}((1 + x)1_{Y_1=1} = y) = \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(Y_1 = 1) & \text{si } y = x + 1 \\ \mathbb{P}(Y_1 = 0) & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La matrice de transition est donnée par $P(x, x + 1) = p$, $P(x, 0) = 1 - p$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

La matrice est irréductible car si $y > x$ on a que $P^{y-x}(x, y) \geqslant P(x, x + 1) \cdots P(x + (y - x - 1), y) \geqslant p^{y-x} > 0$ et si $y < x$ on a que $P^{y+1}(x, y) \geqslant P(x, 0)P(0, 1) \cdots P(y - 1, y) = (1 - p)p^y > 0$. L'unique probabilité stationnaire π (si elle existe) est donnée par les équations

$$\pi(x) = \pi(x - 1)P(x - 1, x) = p\,\pi(x - 1), \qquad x > 0$$

$$\pi(0) = \sum_{x\geqslant 0} \pi(x)P(x, 0) = (1 - p) \sum_{x\geqslant 0} \pi(x) = (1 - p)$$

et donc $\pi(x) = p^x \pi(0) = p^x(1 - p)$ pour tout $x \geqslant 0$. Elle est unique car la matrice P est irréductible. On a bien que $\sum_{x\geqslant 0} \pi(x) = 1$.

Exercice 2. (Retournement du temps) Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace dénombrable M avec matrice de transition P irréductible qui admet une probabilité invariante π. On pose

$$P^*(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x).$$

1. Montrer que P^* est une matrice de transition sur M et que π est une probabilité invariante pour P^*.

2. Montrer que $P = P^*$ si et seulement si π est réversible.

3. Soit $N \geq 1$, et $X_n^* = X_{N-n}, n = 0, ..., N$. Montrer que, si X_0 est distribué avec loi π, alors X_n^* est une chaîne de Markov avec matrice de transition P^* et la loi de X_0^* est π.

Solution. On vérifie facilement que P^* est une matrice de transition, en effet $P^*(x, y) \geqslant 0$ et

$$\sum_y P^*(x, y) = \sum_y \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x) = \frac{\pi(x)}{\pi(x)} = 1$$

car $\pi P = \pi$, étant π invariante pour P. Montrons que π est invariante pour P^*:

$$\sum_x \pi(x) P^*(x, y) = \sum_x \pi(x) \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x) = \pi(y) \sum_x P(y, x) = \pi(y)$$

car P est une matrice de transition et donc $\sum_x P(y, x) = 1$ pour tout $y \in M$.

Pour tout x, y on a que

$$P(x, y) = P^*(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x) \quad \Leftrightarrow \quad \pi(x) P(x, y) = P(y, x) \pi(y)$$

donc π est réversible par rapport à P ssi $P = P^*$.

Pour tout $x_0, \ldots, x_N \in M$ on a

$$\mathbb{P}(X_0^* = x_0, \ldots, X_N^* = x_N) = \mathbb{P}(X_0 = x_N, \ldots, X_N = x_0) = \pi(x_N) P(x_N, x_{N-1}) \cdots P(x_1, x_0)$$

$$= P^*(x_N, x_{N-1}) \pi(x_{N-1}) P(x_{N-1}, x_{N-2}) \cdots P(x_1, x_0)$$

$$= P^*(x_N, x_{N-1}) P^*(x_{N-1}, x_{N-2}) \cdots P^*(x_1, x_0) \pi(x_0)$$

et donc pour tout $0 \leqslant n < N$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}^* = x_{n+1} | X_n^* = x_n, \ldots, X_0^* = x_0) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1}^* = x_{n+1}, X_n^* = x_n, \ldots, X_0^* = x_0)}{\mathbb{P}(X_n^* = x_n, \ldots, X_0^* = x_0)}$$

$$= \frac{P^*(x_{n+1}, x_n) \cdots P^*(x_1, x_0) \pi(x_0)}{P^*(x_n, x_{n-1}) \cdots P^*(x_1, x_0) \pi(x_0)} = P^*(x_{n+1}, x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1}^* = x_{n+1} | X_n^* = x_n)$$

ce qui montre que $(X_n^*)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une chaîne de Markov. Sa loi initiale est π, en effet

$$\mathbb{P}(X_0^* = x_0) = \sum_{x_1, \ldots, x_N} \mathbb{P}(X_0^* = x_0, \ldots, X_N^* = x_N)$$

$$= \sum_{x_1, \ldots, x_N} P^*(x_N, x_{N-1}) P^*(x_{N-1}, x_{N-2}) \cdots P^*(x_1, x_0) \pi(x_0) = \pi(x_0)$$

pour tout $x_0 \in M$.

Exercice 3. (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/K\mathbb{N}$) Soit $M = \mathbb{Z}/K\mathbb{N}$, c'est à dire le cercle discret avec K point. Soit X_n la marche aléatoire avec probabilité p de sauter à droite et $1 - p$ de sauter à gauche. Calculer la probabilité invariante et la matrice P^* de la correspondante chaîne retournée dans le temps.

Solution. La matrice de transition est $P(x, x+1) = p$, $P(x, x-1) = 1 - p$ où on identifie -1 avec $K - 1$ et K avec 0. Le système d'équations pour la probabilité invariante π est

$$\pi(0) = \pi(K-1) p + \pi(1)(1-p)$$

$$\pi(x) = \pi(x-1) p + \pi(x+1)(1-p), \qquad 1 \leqslant x \leqslant K-2$$

$$\pi(K-1) = \pi(K-2) p + \pi(0)(1-p)$$

Une solution est $\pi(x) = 1/K$. En effet, elle est l'unique solution, car il est facile de voir que P est irréductible (en au plus K pas on peut aller de n'import quel état à n'importe quel autre état). La matrice retourné dans le temps est

$$P^*(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x) = P(y, x)$$

et donc $P^*(x, x+1) = 1 - p$ et $P^*(x, x-1) = p$ pour tout $0 \leqslant x \leqslant K - 1$.

Exercice 4. (Processus de naissance et mort) Soit $(p_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres dans $]0, 1[$ et Q la matrice de transition définie par:

$$P(0,1) = 1; \qquad \begin{cases} P(k, k+1) = p_k \\ P(k, k-1) = 1 - p_k = q_k \end{cases} \quad s\,i\,k \geq 1.$$

avec $0 < p_k < 1$ pour tout $k \geq 1$.

a) Montrer que la chaîne de Markov associée est irréductible.

b) On pose $\gamma_0 = 1$ et

$$\gamma_n = \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} \qquad n \geq 1$$

Montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_0^\infty \gamma_n = \infty$.

Solution. Soit $x, y \in \mathbb{N}$ avec $y > x$, alors $P^{y-x}(x, y) \geqslant P(x, x+1) P(x+1, x+2) \cdots P(y-1, y) = p_x p_{x+1} \cdots p_{y-1} > 0$. Soit $x > y$, alors $P^{y-x}(x, y) \geqslant P(x, x-1) \cdots P(y+1, y) = q_x \cdots q_{y+1} > 0$, donc la matrice P est irréductible.

Pour montrer la récurrence on calcule la probabilité de revenir en 0: $\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty)$ avec $T_x = \inf\{n > 0 \colon X_n = x\}$. Par Markov on a que pour tout $N > 0$

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < +\infty) = \mathbb{P}_1(S_0 < +\infty) \geqslant \mathbb{P}_1(S_0 < +\infty, S_N = +\infty)$$

avec $S_x = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n = x\}$. Soit

$$u_N(x) = \mathbb{P}_x(S_0 < +\infty, S_N = +\infty)$$

Par la propriété de Markov la fonction u_N satisfait l'équation

$$u_N(x) = p_x\, u_N(x+1) + q_x\, u_N(x-1)$$

pour tout $0 < x < N$ avec les conditions au bord $u_N(0) = 1$ et $u_N(N) = 0$. Donc

$$u_N(x+1) - u_N(x) = \frac{q_x}{p_x} (u_N(x) - u_N(x-1))$$

ce qui nous donne

$$u_N(x+1) - u_N(x) = \frac{q_x \cdots q_1}{p_x \cdots p_1} (u_N(1) - 1)$$

et

$$u_N(x) = 1 + \sum_{k=1}^{x-1} \frac{q_k \cdots q_1}{p_k \cdots p_1} (u_N(1) - 1)$$

Maintenant

$$0 = u_N(N) = 1 + (u_N(1) - 1) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{q_k \cdots q_1}{p_k \cdots p_1}$$

Et on obtient que

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) \geqslant u_N(1) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{q_k \cdots q_1}{p_k \cdots p_1} \right)^{-1}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q_k \cdots q_1}{p_k \cdots p_1} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \to \infty} u_N(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) = 1$$

Inversement

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) < 1 \quad \Rightarrow \quad \limsup_{N \to \infty} u_N(1) < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q_k \cdots q_1}{p_k \cdots p_1} = \limsup_N \frac{1}{1 - u_N(1)} < +\infty$$

ce qui nous donne

$$\mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q_k \cdots q_1}{p_k \cdots p_1} = +\infty.$$

Exercice 5. (Promenade aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$) Si U est une v.a. à valeur dans $\mathbb{Z}^d$ on considère la fonction $\varphi_U(t), t \in [0,1)^d$ définie par la somme de Fourier:

$$\varphi_U(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i \langle z, t \rangle} \mathbb{P}(U = z)$$

1. Vérifier que $\mathbb{P}(U = z) = \int_{[0,1[^d} e^{2\pi i \langle z,t \rangle} \varphi_U(t) \, \mathrm{d}t$.

2. Soit $(U_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. On pose $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{j=i}^n U_j$. Montrer que le point 0 est récurrent pour cette chaîne de Markov si et seulement si

$$\lim_{\lambda \uparrow 1^-} \int_{[0,1[^d} \Re\left(\frac{1}{1 - \lambda \varphi(t)} \right) \mathrm{d}t = +\infty$$

3. Appliquer ce critère à la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{2d} \quad |x-y| = 1 \\ &= 0 \quad\ \ |x-y| \neq 1 \end{aligned}$$

Solution. Soit $\mathbb{L}$ la loi de U sur $\mathbb{Z}^d$, par le théorème de Fubini par rapport à la mesure produit $\mathbb{L} \times \mathrm{d}t$ sur l'espace $\mathbb{Z}^d \times [0,1[^d$ on a

$$\int_{[0,1[^d} e^{2\pi i \langle z,t \rangle} \varphi_U(t) \, \mathrm{d}t = \int_{[0,1[^d} e^{2\pi i \langle z,t \rangle} \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i \langle w,t \rangle} \mathbb{P}(U = w) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(U = w) \int_{[0,1[^d} e^{2\pi i \langle z,t \rangle} e^{-2\pi i \langle w,t \rangle} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{w \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(U = w) \int_{[0,1[^d} e^{2\pi i \langle z,t \rangle} e^{-2\pi i \langle w,t \rangle} \mathrm{d}t = \mathbb{P}(U = z)$$

car, par un calcul direct on a que

$$\int_{[0,1[^d} e^{2\pi i\langle z,t\rangle} e^{-2\pi i\langle w,t\rangle} \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } w = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a aussi que

$$\varphi_{U_1+\cdots+U_n}(t) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i\langle z,t\rangle} \mathbb{P}(U_1+\cdots+U_n = z)$$

$$= \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i\langle z,t\rangle} \sum_{\substack{z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{Z}^d \\ z_1+\cdots+z_n=z}} \mathbb{P}(U_1 = z_1)\cdots\mathbb{P}(U_n = z_n)$$

$$= \sum_{\substack{z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{Z}^d \\ z_1+\cdots+z_n=z}} e^{-2\pi i\langle z_1+\cdots+z_n,t\rangle} \mathbb{P}(U_1 = z_1)\cdots\mathbb{P}(U_n = z_n) = \varphi_U(t)^n$$

donc

$$\mathbb{P}(U_1+\cdots+U_n = z) = \int_{[0,1[^d} e^{2\pi i\langle z,t\rangle} \varphi_{U_1+\cdots+U_n}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{[0,1[^d} e^{2\pi i\langle z,t\rangle} \varphi_U(t)^n\, \mathrm{d}t$$

$$= \Re \int_{[0,1[^d} e^{2\pi i\langle z,t\rangle} \varphi_U(t)^n\, \mathrm{d}t$$

Pour montrer la récurrence au point $x\in\mathbb{Z}^d$ il suffit montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} P^n(x,x) = +\infty$$

Or

$$P^n(x,x) = \mathbb{P}_x(X_n = x) = \mathbb{P}(U_1+\cdots+U_n = 0) = \Re \int_{[0,1[^d} \varphi_U(t)^n\, \mathrm{d}t$$

Maintenant, pour justifier l'échange de sommation et intégrale on introduit un paramètre $0 < \lambda < 1$ et on considère

$$\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n P^n(x,x) = \sum_{n\geqslant 0} \Re \int_{[0,1[^d} \lambda^n \varphi_U(t)^n\, \mathrm{d}t = \int_{[0,1[^d} \Re \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n \varphi_U(t)^n\, \mathrm{d}t$$

car $|\varphi_U(y)| = |\mathbb{E}[e^{-i2\pi\langle z,U\rangle}]| \leqslant \mathbb{E}[|e^{i2\pi\langle z,U\rangle}|] \leqslant 1$ et

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_{[0,1[^d} \lambda^n |\varphi_U(t)^n|\, \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \int_{[0,1[^d} \lambda^n \mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda} < +\infty.$$

Maintenant pour tout t on a

$$\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n \varphi_U(t)^n = \frac{1}{1-\lambda\varphi_U(t)}$$

alors

$$\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n P^n(x,x) = \int_{[0,1[^d} \Re \frac{1}{1-\lambda\varphi_U(t)}\, \mathrm{d}t$$

et par convergence monotone

$$\sum_{n \geqslant 0} P^n(x,x) = \lim_{\lambda \uparrow 1-} \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n P^n(x,x) = \lim_{\lambda \uparrow 1-} \int_{[0,1[^d} \Re \frac{1}{1-\lambda \varphi_U(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$, alors

$$\varphi_U(t) = \mathbb{E}[e^{-i2\pi\langle z,U\rangle}] = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \cos(2\pi z_i)$$

car $\mathbb{P}(U = \pm\, e_i) = 1/2d$ où $(e_i \in \mathbb{Z}^d)_{i=1,\ldots,d}$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^d$ ($(e_i)^j = 1$ si $i = j$ et 0 sinon). Donc

$$\int_{[0,1[^d} \Re \frac{1}{1-\lambda\varphi_U(t)}\, \mathrm{d}t = \int_{[0,1[^d} \frac{1}{1-\lambda \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \cos(2\pi\, t_i)}\, \mathrm{d}t$$

$$\leqslant d \int_{[0,1[^d} \frac{1}{d(1-\lambda) + \sum_{i=1}^{d} [1-\cos(2\pi\, t_i)]} \mathrm{d}t$$

Par périodicité de la fonction à intégrer on a que

$$\int_{[0,1[^d} \frac{1}{\sum_{i=1}^{d} [1-\cos(2\pi\, t_i)]} \mathrm{d}t = \int_{[-1/2,1/2[^d} \frac{1}{\sum_{i=1}^{d} [1-\cos(2\pi\, t_i)]} \mathrm{d}t$$

Il n'est pas difficile de montrer que la fonction à intégrer est singulier seulement pour $t = 0$ et que il existent des constantes C_1, $C_2 > 0$ telles que $C_1|t|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{d} [1 - \cos(2\pi\, t_i)] \leqslant C_2|t|^2$ pour tout $t \in [-1/2, 1/2[^d$ et donc que

$$\int_{[-1/2,1/2[^d} \frac{1}{d(1-\lambda) + C_2|t|^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_{[-1/2,1/2[^d} \frac{1}{d(1-\lambda) + \sum_{i=1}^{d} [1-\cos(2\pi\, t_i)]} \mathrm{d}t$$

et

$$\int_{[-1/2,1/2[^d} \frac{1}{d(1-\lambda) + \sum_{i=1}^{d} [1-\cos(2\pi\, t_i)]} \mathrm{d}t \leqslant \int_{[-1/2,1/2[^d} \frac{1}{d(1-\lambda) + C_1|t|^2} \mathrm{d}t$$

La limite

$$\lim_{\lambda \uparrow 1-} \int_{[-1/2,1/2[^d} \frac{1}{d(1-\lambda) + C_{1,2}|t|^2} \mathrm{d}t$$

est fini si $d > 2$ et $= +\infty$ pour $d = 1, 2$. On en peut déduire que la marche aléatoire est récurrente pour $d = 1, 2$ et transiente pour $d \geqslant 3$.