TD4. Chaînes de Markov (III).

Exercice 1. Soit Y_n une suite i.i.d. avec loi $P(Y_n = 1) = p$ et $P(Y_n = 0) = 1 - p$. Soit $X_n = \inf \{i \geq 0;\ Y_{n-i} = 0\}$, soit le nombre consécutifs de 1 avant n.

1. Montrer que X_n est une chaine de Markov et donner sa matrice de transition.

2. Montrer que X_n est irreductible et calculer sa probabilité stationnaire. Y-a-t-'il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne ?

Exercice 2. (Retournement du temps) Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace denombrable M avec matrice de transition P qui admet une probabilité invariante π. On pose

$$P^*(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x)$$

1. Montrer que P^* est une matrice de transition sur M et que π est une probabilité invariante pour P^*.

2. Montrer que $P = P^*$ si et seulement si π est reversible.

3. Soit $N \geq 1$, et $X_n^* = X_{N-n}, n = 0, \ldots, N$. Montrer que, si X_0 est distribué avec loi π, alors X_n^* est une chaîne de Markov avec matrice de transition P^* et la loi de X_0^* est π.

Exercice 3. (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/K\mathbb{N}$) Soit $M = \mathbb{Z}/K\mathbb{N}$, c'est à dire le circle discret avec K point. Soit X_n la marche aléatoire avec probabilité p de sauter à droite et $1 - p$ de sauter à gauche. Calculer la probabilité invariante et la matrice P^* de la correspondante chaîne retournée dans le temps.

Exercice 4. (Processus de naissance et mort) Soit $(p_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres dans $]0, 1[$ et Q la matrice de transition définie par:

$$P(0, 1) = 1; \qquad \begin{cases} P(k, k+1) = p_k \\ P(k, k-1) = 1 - p_k = q_k \end{cases} \quad s\,i\,k \geq 1.$$

avec $0 < p_k < 1$ pour tout $k \geq 1$.

2.a. Montrer que la chaîne de Markov associée est irréductible.

2.b. On pose $\gamma_0 = 1$ et

$$\gamma_n = \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} \qquad n \geq 1$$

Montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_0^\infty \gamma_n = \infty$.

Exercice 5. (Promenade aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$) Si U est une v.a. à valeur dans $\mathbb{Z}^d$ on considère la fonction $\varphi_U(t), t \in [0, 1)^d$ définie par la somme de Fourier:

$$\varphi_U(t) = \sum_{z \in Z^d} e^{-2\pi i <z,t>} P(U = z)$$

1. Vérifier que $P(U = z) = \int_{[0,1)^d} e^{2\pi i <z,t>} \varphi_U(t)\, dt$.

2. Soit $(U_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. On pose $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{j=i}^n U_j$. Montrer que le point 0 est récurrent pour cette chaîne de Markov si et seulement si

$$\lim_{\lambda \uparrow 1^-} \int_{[0,1)^d} \mathcal{R}e\left(\frac{1}{1-\lambda\varphi(t)}\right) \mathrm{d}t = +\infty$$

3. Appliquer ce critère à la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{1}{2d} \quad |x-y| = 1 \\ &= 0 \quad\quad |x-y| \neq 1 \end{aligned}$$