

TD5. Chaînes de Markov (IV).

Exercice 1. On répartit $2N$ boules, N noires et N blanches, dans 2 urnes à raison de N boules par urne. Puis à chaque instant on choisit un boule au hasard dans chacune des urnes et on les échange. On désigne par X_n le nombre de boules noires dans l'urne 1 après n échanges.

1. Préciser l'espace d'états M de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et calculer sa matrice de transition P .
2. Montrer que cette chaîne est irréductible. Est-elle fortement irréductible (c'est-à-dire: existe-t-il un entier n_0 tel que $P^{n_0}(i, j) > 0$ pour tout $i, j \in M$) ?
3. On rappelle que $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $\forall k \leq N, k, N \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité définie par $\pi(k) = c \binom{N}{k}^2$, $\forall k \in M$ (où c est une constante que l'on précisera) est une probabilité stationnaire réversible. Y-a-t-il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne ?
4. Que peut-on dire sur le comportement de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k=i},$$

pour tout $i \in M$, quand $n \rightarrow \infty$?

5. Quel est le temps moyen de retour à l'état N ? Confronter avec le temps moyen de retour à l'état $N/2$ ($(N+1)/2$ si N impair)

Exercice 2. (CHÂTEAU DE CARTES). On considère la suite de v.a. définie par

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + 1 & \text{avec probabilité } p \in]0, 1[\\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - p ; \end{cases}$$

indépendamment de ce qui précède.

1. Vérifier que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
2. Calculer la probabilité invariante par la chaîne (on pourra en chercher la fonction génératrice).
3. Calculer la correspondante matrice P^* de la chaîne retournée dans le temps.
4. Montrer que, $\forall y, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_y(X_t = x) = \pi(x)$, où π est la probabilité invariante.
5. Soit $\tau_k = \inf \{n \geq 1: X_n = k\}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$. Calculer $\mathbb{E}_k(\tau_k)$.
6. Calculer, en partant de 0 ($X_0 = 0$) l'espérance du temps passé au-dessus de k avant de tomber sur 0 la première fois

$$\mathbb{E}_0 \left(\sum_{n=0}^{\tau_0-1} \mathbf{1}_{[X_n \geq k]} \right)$$

Exercice 3. (MÉTHODE MONTE-CARLO) Soit M un espace fini et $\pi = \{\pi(x), x \in M\}$ une probabilité sur M telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in M$. On se donne une matrice de transition \mathcal{P} sur M , irréductible et telle que $\mathcal{P}(x, y) > 0 \iff \mathcal{P}(y, x) > 0$. Soit $h:]0, \infty] \rightarrow]0, 1]$ une fonction vérifiant

$$h(u) = u h\left(\frac{1}{u}\right).$$

Par exemple $h(u) = \inf(u, 1)$ ou bien $h(u) = \frac{u}{1+u}$. Pour $x \neq y$ posons

$$R(x, y) = \begin{cases} h\left(\frac{\pi(y)\mathcal{P}(y, x)}{\pi(x)\mathcal{P}(x, y)}\right) & \text{si } \mathcal{P}(y, x) > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

On construit alors une probabilité de transition Q définie par

$$\begin{cases} Q(x, y) = \mathcal{P}(x, y)R(x, y) & \text{si } x \neq y \\ Q(x, x) = 1 - \sum_{y \neq x} Q(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

1. Montrer que Q est une matrice de transition bien définie et que π est réversible pour Q .
2. Montrer que Q est une matrice de transition irréductible.
3. Montrer que si $h(u) < 1$ alors Q est apériodique. En déduire que dans ce cas $Q^n(x, y) \rightarrow \pi(y)$ quand $n \rightarrow \infty, \forall x \in M$.

Exercice 4. On considère la chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible et calculer sa probabilité invariante.
2. Soit $N_n(i)$ le nombre de fois où la chaîne passe par l'état i au cours des n premières étapes. Quel est le comportement asymptotique de $N_n(i)$ quand n tend vers l'infini ?