Premièr contrôle continu

Exercice 1 [1]. Soit (X,Y) un vecteur gaussien de moyenne nulle et matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Donner la loi de la v.a. $Z = 2X - 3Y$

b) Calculer $\mathbb{P}(X > Y - 2)$.

Exercice 1 [2]. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire tel que si on pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$ on a que U, V sont indépendantes, $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $V \sim \mathcal{N}(0,1)$.

a) Calculer la moyenne de (X,Y) et sa matrice de covariance.

b) Calculer la fonction caractéristique $\phi_{(X,Y)}(t_1,t_2)$ du vecteur (X,Y).

Exercice 1 [3].

a) A quelle condition nécessaire et suffisante sur le réel a la matrice $\Sigma = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle la matrice de covariance d'un vecteur gaussien non dégénéré (X,Y)(càd admettant une densité) ?

b) On suppose que $a = 7$ et que le vecteur gaussien est centré. Donner la loi de $Z = ((X+Y)/4)^2$.

Exercice 1 [4]. Soit (X,Y) un vecteur gaussien de moyenne $(1,\,1)$ et de matrice de covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. On pose $U = X - Y$ et $V = 3X + 2Y$.

a) Déterminer la loi de (U,V).

b) Calculer $\mathbb{E}(U^2V^2)$.

Exercice 2 [1]. Soient X, Y, Z des v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(0,4)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,4)$ et $Z \sim \mathcal{E}(1/2)$. Donner la densité de la v.a. $W = X^2 + Y^2 + 4Z$.

Exercice 2 [2]. Soient X, Y, Z des v.a. $\mathcal{E}(3)$ indépendantes. Donner la densité de la v.a. $W = \min(X, Y, Z)$.

Exercice 2 [3]. Une v.a. X suit une loi de Pareto VP$(a,1)$ si elle admet pour densité $f(x) = cx^{-(a+1)}\mathbb{I}_{x>1}$ (a réel > 0)

a) Déterminer la constante c

b) Soit Y une v.a. indépendante de X, de loi VP$(b,1)$. Déterminer la loi de $U = \inf(X,Y)$.

Exercice 2 [4]. Soit X une v.a. de densité $f(x) = 2x\exp(-x^2)\mathbb{I}_{x>0}$

a) Déterminer la loi de $U = X^2$.

b) Soit Y une va indépendante de X et de même loi. Déterminer la loi de $X^2 + Y^2$.

Exercice 3 [1]. Soit X, Y un couple aléatoire de densité

$$f_{X,Y}(x,y) = c(\mathbb{I}_{y\in[-1,0[,x\in[-1,0[} + \mathbb{I}_{y\in]0,1],x\in]0,1]}).$$

a) Déterminer c.

b) Montrer que X, Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 [2]. Soit X, Y un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}(x,y) = c\mathbb{I}_{|x|\le|y|\le 1}$.

a) Déterminer c.

b) Calculer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$.

Exercice 3 [3]. Soit X, Y un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}(x,y) = c\mathbb{I}_{|x-y|\leq 1}\mathbb{I}_{|x|\leq 1}\mathbb{I}_{|y|\leq 1}$.

a) Déterminer c.

b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$.

Exercice 3 [4]. Soit X, Y un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}(x,y) = c\mathbb{I}_{xy<0}\mathbb{I}_{|x|\leq 1}\mathbb{I}_{|y|\leq 1}$.

a) Déterminer c.

b) Calculer $\mathbb{P}(X + Y \geq 0)$.