Deuxième contrôle continu

[Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1 [1]. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. iid.

a) Déterminer la loi des X_n telle que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ soit une v.a. avec loi $\Gamma(n, 3)$.

b) On pose $Y_n = a_n(S_n - b_n)$ avec a_n, b_n des suites numériques. Déterminer a_n, b_n de sorte que Y_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 1 [2]. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. iid.

a) Déterminer la loi des X_n telle que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ soit une v.a. de loi $P(3n)$.

b) On pose $Y_n = a_n(S_n - b_n)$ avec a_n, b_n des suites numériques. Déterminer a_n, b_n de sorte que Y_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 1 [3]. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite iid de loi Ber(p) avec $p \in]0, 1[$ et $S_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

a) Calculer la moyenne de S_n.

b) Montrer que S_n converge en probabilité vers 0.

Exercice 1 [4]. Soit $Z \sim$ Ber(p) et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des v.a. telles que $X_n = (1 - Z)(1 + 1/n)^n + Z(1 - 1/n)^n$.

a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \frac{p}{e} + (1 - p)e$

b) Montrer que X_n converge en probabilité vers la v.a. $Y = (1 - Z)e + Z/e$.

Exercice 2 [1]. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi correspondant à la densité

$$f(x) = e^{-(x-a)}\mathbb{I}_{x\geq a}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ paramètre inconnu. Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance pour a.

Exercice 2 [2]. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(0, s)$ et $s > 0$ le paramètre inconnu. Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance pour s.

Exercice 2 [3]. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi de loi correspondant à la densité

$$f(x) = (1 + a)x^a\mathbb{I}_{x\in]0,1]}$$

avec $a > -1$ paramètre inconnu. Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance pour a.

Exercice 2 [4]. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{U}([0, 2a])$ avec $a > 0$ paramètre inconnu. Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance pour a.

Exercice 3 [1]. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi correspondant à la densité

$$f(x) = e^{-(x-a)}\mathbb{I}_{x\geq a}$$

avec $a \in \mathbb{R}$ paramètre inconnu. Déterminer un estimateur pour a avec la méthode des moments.

Exercice 3 [2]. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{U}([m-1, m+1])$ et $m \in \mathbb{R}$ le paramètre inconnu. Déterminer un estimateur pour m avec la méthode des moments.

Exercice 3 [3]. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{U}([a, 2a])$ avec $a > 0$ paramètre inconnu. Déterminer un estimateur pour a avec la méthode des moments.

Exercice 3 [4]. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(0, s)$ et $s \in \mathbb{R}_+$ le paramètre inconnu. Déterminer un estimateur pour s avec la méthode des moments.