Partiel

Exercice 1. Considérons le couple (X, Y) de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \alpha \frac{e^{-y}}{\sqrt{x}} \mathbb{I}_{0<x<y^2} \mathbb{I}_{y>0} .$$

a) Déterminer $\alpha > 0$ t.q. $f_{(X,Y)}$ soit correctement normalisée.

b) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.

c) Calculer la densité conditionnelle $f_{Y|X=x}(y)$ de Y sachant $X = x$.

Exercice 2. Soit $(X,\ Y)$ le vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Soit $W = X - 3Y$. $Z = Y - \alpha X$.

a) Calculer moyenne et variance de la v.a. W.

b) Déterminer la densité $f_W(w)$ de la v.a. W.

c) Déterminer α tel que X et Z soient indépendantes.

d) Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$ et $\mathrm{Var}(Y|X)$.

Exercice 3. Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,\ 1)$. On pose $U = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|^2$ et $V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|^2$.

a) Calculer $\mathbb{E}[V]$.

b) Déterminer la loi de V.

c) Déterminer la loi de U et calculer $\mathbb{E}[U]$.

Exercice 4. Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $1/(n+1)$. Montrer que la v.a. $X_n \log(1 + 1/n)$ converge en loi vers une v.a. $\mathcal{E}(1)$ (exponentielle de paramètre 1).

Exercice 5. Soient X, Y deux v.a. réelles telles que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)/2 = 1$ et que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 2$. Leur coefficient de corrélation est $\rho_{X,Y} = -1$ ce qui implique qu'il existe deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $X = \alpha Y + \beta$:

a) Déterminer les deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Calculer $\mathbb{E}[(X+3)^2|Y]$.