

TD1. Intégrales doubles et couples de variables aléatoires.

Exercice 1. Calculer les intégrales $\int_D f(x, y) dx dy$ dans les cas suivants :

- a) $f(x, y) = 1/(x + y + 1)^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
- b) $f(x, y) = \sin(x + y)$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$.
- c) $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.
- d) $f(x, y) = \exp(-y)/(2\sqrt{x})$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0, x \leq y^2\}$.
- e) $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Utiliser le passage en coordonnées polaires) .
- f) $f(x, y) = (x + y)^2 \exp(x^2 - y^2)$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ (Utiliser le changement de variable $u = x + y$ et $v = x - y$) .
- g) $f(x, y) = y \exp(-xy)$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. On demande ici de calculer l'intégrale de deux façons différentes (intégrer d'abord en x puis en y ; faire ensuite le contraire).

Exercice 2. Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} k(y^2 - x^2 + 1) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour quelle valeur de k , f peut-elle représenter la densité d'un couple de variables aléatoires ?

Exercice 3. Soit $V = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires admettant pour densité

$$f_V(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

- a) Déterminer k ainsi que les lois marginales de X et de Y .
- b) Déterminer $\text{cov}(X, Y)$ et étudier l'indépendance de X et Y .

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi continue uniforme sur $[0, 1]$.

- a) Calculer la densité de probabilité de $T = \inf(X, Y)$ et de $Z = \sup(X, Y)$.
- b) Calculer l'espérance mathématique de Z et de T .
- c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre Z et T .

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant pour densité de probabilité $f_{(X, Y)}(x, y) = \exp(-y) \mathbb{I}_{[x, +\infty[}(y) \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

- a) Vérifier que $f_{(X, Y)}$ est bien une densité de probabilité.

b) Déterminer les lois marginales de X et de Y .

c) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1 | Y > 2)$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire admettant pour loi conditionnelle lorsque $Y = y$, la loi de densité : $y^2 x \exp(-y x) 1_{\mathbb{R}_+}(x)$. La variable aléatoire Y admet pour densité $f_Y(y) = 1/y^2 1_{]1, +\infty[}(y)$. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$ ainsi que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y | X)$.

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. On considère les variables U et V définies par $U = X + Y$ et $V = X/Y$.

a) Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (U, V) . Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

b) Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(V)$.