TD2. Vecteurs aléatoires, vecteurs Gaussiens et loi Gamma et Khi-deux.

Exercice 1. Soit $(X,\ Y)$ un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ admettant une densité $f_{(X,Y)}(x,y) = C\,\mathbb{I}_{x^2+y^2\leqslant 1}$

a) Déterminer C et montrer que X, Y ne sont pas indépendantes.

b) Calculer $\mathbb{P}(X+Y\leq 0)$ et $\mathbb{P}(X\geq 0, Y\geq 0)$ et $\mathrm{Var}(X|Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])^2|Y]$.

c) Soient (R,Θ) tels que $R\geq 0$, $\Theta\in[0,2\pi)$ et $X = R\sin(\Theta)$, $Y = R\cos(\Theta)$. Montrer que R,Θ sont indépendantes et calculer leurs lois marginales.

Exercice 2. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires tel que la loi marginale de X est une loi uniforme sur $[0,1]$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une loi $\mathcal{N}\big(x,x^2\big)$.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

b) Montrer que X et Y/X sont indépendantes.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\mathcal{G}(\alpha_1, \beta)$ et $\mathcal{G}(\alpha_2,\beta)$. On pose $S = X+Y$ et $T = X/(X+Y)$.

a) Montrer que S et T sont des variables indépendantes et préciser leurs lois respectives.

b) Déterminer la loi de X/Y et calculer son espérance si elle existe.

Exercice 4. Montrer que la loi exponentielle de paramètre λ est un cas particulier de la loi Gamma. Considérons maintenant X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 5. Soit U_1, ..., U_n n variables indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}[0,\ 1]$. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $I_n = \min(U_1,\ldots,U_n)$ et $M_n = \max(U_1,\ldots,U_n)$.

Exercice 6. Soit $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où ρ est un réel.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel ρ pour que Σ soit la matrice de variance-covariance d'un vecteur gaussien.

b) On suppose de plus que ce vecteur gaussien est centré. Donner l'expression analytique de sa densité de probabilité.

Exercice 7. Soit $(X,\ Y)$ un vecteur gaussien de moyenne $(1,\ -1)$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y, $\mathbb{P}(X<0)$ et $\mathbb{P}(X-Y<0)$.

b) Déterminer la valeur de α telle que $\mathbb{P}(|X+Y|\leq\alpha)\geq 0.9$.

Exercice 8. Soit (X,Y) deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X/Y$. Montrer que U suit une loi de Cauchy, i.e. une loi dont la densité de probabilité est de la forme $f(u) = \frac{1}{\pi(u^2+1)}$.