

TD3. Vecteurs Gaussiens.

Exercice 1. Soit (X, Y) un vecteur gaussien. Montrer que $X + Y$ est une variable aléatoire gaussienne dont on précisera les paramètres en fonction des caractéristique du vecteur aléatoire (X, Y) .

- Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ où μ est un vecteur de \mathbb{R}^2 et Σ une matrice carrée d'ordre 2 symétrique définie positive. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 inversible. on pose $Y = A X$. Montrer que Y est un vecteur gaussien dont on donnera la moyenne et la matrice de variance-covariance.
- On suppose maintenant que X suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \geq a \\ -X & \text{si } |X| < a \end{cases}$.
Montrer Y suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X + Y$ n'est pas gaussienne. En déduire que le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.
- Soit U une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et E une variable aléatoire indépendante de U de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On pose $V = a U + E$ où a est un réel fixé. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(U|V)$.

Exercice 2.

- Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X^2$. Déterminer la densité de probabilité de U et l'identifier comme la densité d'une loi Gamma dont on précisera les paramètres. En déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- Soit X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^n X_i^2$. Donner sa densité de probabilité, son espérance et sa variance. Cette loi porte le nom de loi de chi-deux à n degrés de liberté. On la note $\chi^2(n)$.
- Soient V et W deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\chi^2(n)$ et $\chi^2(m)$. Déterminer la loi de $V + W$.

Exercice 3. Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et K une v.a. discrete telle que $\mathbb{P}(K = -1) = \mathbb{P}(K = 1) = 1/2$ et K est indépendante de X . On considère $Y = K X$.

- Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(Y)$ et $\text{Cov}(X, Y)$.
- Calculer la fonction de répartition de Y et en déduire que $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Montrer (par un argument simple) que le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.

Exercice 4. Soit (X, Y) le vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $Z = Y - \alpha X$.

- Déterminer α tel que X et Z soient indépendantes.
- Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y et après entre X^2 et Y^2 .

Exercice 5. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dans \mathbb{R}^2 tel que $X \sim \mathcal{N}(1, 1)$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est $\mathcal{N}(3x, 4)$.

- Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien.

b) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est gaussienne.

Exercice 6. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien dans \mathbb{R}^2 centré et de matrice de covariance l'identité I_2 . Soit (Z, Q) le vecteur aléatoire défini par $Z = (X + Y)/2$ et $Q = (X - Y)/2$. On pose $U = \frac{1}{2}(X - Z)^2 + \frac{1}{2}(Y - Z)^2$

a) Calculer la fonction caractéristique du vecteur (Z, Q) et montrer qu'il est un vecteur gaussien et que Z, Q sont indépendantes.

b) Montrer que Z et U sont indépendantes et donner la loi de U .