

TD6. Intervalles de confiance.

Exercice 1. Montrer que si Y est une v.a. telle que sa densité f_Y est une fonction paire et q_α les quantiles de Y alors $q_{1-\alpha} = -q_\alpha$.

Exercice 2. Calculer la fonction q_α dans les cas suivantes

1. $Y \sim B(2, 1/2)$;
2. $Y \sim \mathcal{U}([0, 1])$;
3. $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$;
4. $Y \sim \mathcal{G}\text{eom}(p)$, $p \in]0, 1[$;

Exercice 3. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$ un modèle paramétrique. Soient ζ_α les quantiles de la v.a. Gaussienne standard (centrée et réduite). On pose $A_n = \bar{X}_n - \zeta_\gamma/\sqrt{n}$ et $B_n = \bar{X}_n + \zeta_\beta/\sqrt{n}$. Déterminer β et γ dans $[0, 1]$ tels que $[A_n, B_n]$ soit un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour μ .

Exercice 4. Soit $X \sim \text{Ber}(\theta)$. L'EMV pour θ est $T_n = \bar{X}_n$.

1. Montrer que

$$\frac{\sqrt{n}(T_n - \theta)}{\sqrt{T_n(1 - T_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

(utiliser le TCL, la LGN, le théorème de continuité et le lemme de Slutsky).

2. Donner un intervalle de confiance asymptotique et bilatéral symétrique de niveau $1 - \alpha$ pour θ .

Exercice 5. Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer un intervalle de confiance de la forme $\{\lambda > a\}$ de niveau $1 - \alpha$ pour λ .

Exercice 6. On observe un échantillon de taille n issu de la loi $X \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ avec $\theta > 0$. Quelle est la loi de $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)/\theta$? Déterminer un intervalle de confiance pour θ de niveau $1 - \alpha$.

Exercice 7. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de loi $B(2, \theta)$ avec $\theta \in]0, 1[$. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique et symétrique de niveau 95% pour θ .

Exercice 8. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de loi $\mathcal{U}([a - b, a + b])$ avec $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}$

- a) Déterminer un estimateur (A_n, B_n) du couple (a, b) par méthode des moments.
- b) L'estimateur A_n de a est-il asymptotiquement normale? Pourquoi?
- c) On suppose que $b = 2$. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique à niveau 95% pour a .