Convergence et théorèmes limites

Préliminaires

Notation. Si $u \in \mathbb{R}^d$ on note par $\|u\|_r$ la norme L^r du vecteur u: $\|u\|_r = \left(\sum_{i=1}^d |u_i|^r\right)^{1/r}$. Comme toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^d$ on prendra $r=1$ et on notera $\|u\| = \|u\|_1 = \sum_{i=1}^r |u_i|$. « iid » est abrégé pour « indépendantes et identiquement distribuées ». On notera $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ ou $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une générique suite (infinie) de v.a.

Convergence en loi

Théorème 1. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Les conditions suivantes sont équivalentes (c-à-d chacune d'entre elles implique toutes les autres):*

1. *$\forall t \in \mathbb{R}^d \lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi_X(t)$;*
2. *$\lim_{n\to\infty} F_X(x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ point de continuité de F_X;*
3. *$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$ pour tout fonction $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et bornée.*

Si une de ces conditions est vérifiée (et donc toutes) on dit que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi (ou en distribution) vers X (et l'on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$).

Rappel. Dans $\mathbb{R}^d$, $F_X(x) = F_X(x_1, \ldots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_d \leqslant x_d)$.

Exemple 2. On considère la suite de v.a. $(X_n)_{n\geqslant 1}$ telle que X_n est une v.a. uniforme discrète à valeurs dans $\{1/n, 2/n, 3/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$.

$$\phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} e^{itk/n} = \frac{e^{it/n}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{itk/n} = \frac{e^{it/n}}{n} \frac{e^{it}-1}{e^{it/n}-1}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{it/n}}{n} \frac{e^{it}-1}{e^{it/n}-1} = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

Si $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ alors

$$\phi_X(t) = \int_0^1 e^{itx} \mathrm{d}x = \frac{e^{it}-1}{it}$$

et donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}}$X.

Exemple 3. Soient $U_1, U_2, \ldots$ des v.a. iid $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $X_n = n \min_{1\leqslant k\leqslant n} U_k$. Montrons que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une v.a. $X \sim \mathcal{E}(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(n \min_{1\leqslant k\leqslant n} U_k \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(n \min_{1\leqslant k\leqslant n} U_k > x) = 1 - [\mathbb{P}(U_1 > x/n)]^n$$

$$= 1 - [1 - \mathbb{P}(U_1 \leqslant x/n)]^n = 1 - [1 - F_{U_1}(x/n)]^n$$

et donc

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - [1 - (x/n)]^n & \text{si } x/n \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x/n < 0 \\ 1 & \text{si } x/n > 1 \end{cases}$$

Fixons $x > 0$ et choisissons n suffisamment grand tel que $x/n \in [0,1]$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - [1 - (x/n)]^n = 1 - e^{-x}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} = F_X(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. discrètes telles que $\mathbb{P}(X_n = 1/n) = 1$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ou X est la v.a. identiquement nulle $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. On voit bien que $F_{X_n}(0) = 0$ pour tout n mais que $F_X(0) = 1$. Donc en générale on ne pourrait pas avoir convergence de $F_{X_n}(t)$ vers $F_X(t)$ dans tous les points $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 5. Reprenons l'exemple 2 de convergence vers la loi uniforme dans [0, 1]. Montrons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ en utilisant le critère *(iii)* du théorème 6. Soit f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, par les propriétés de l'intégrale de Riemann on a que

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{I}_{0<x<1}\mathrm{d}x = \mathbb{E}[f(X)].$$

Convergence en probabilité

Définition 6. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a. dans $\mathbb{R}^d$ telles que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et X soient définies sur le même espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) = 0.$$

Exemple 7. Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. On définit $X_n = \mathbb{I}_{U\in[0,1/n]}$. Montrons que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Soit $\varepsilon > 0$ on doit prouver que $\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) \to 0$. Mais

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathbb{I}_{U<1/n} > \varepsilon) = \mathbb{P}(U < 1/n) = 1/n \to 0$$

pour $n \to \infty$.

Loi faible des grandes nombres

Définition 8. *Soit $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ un vecteur aléatoire. On définit la moyenne empirique des $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ par $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$.*

Exemple 9. Soient les X_i des v.a. iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|Z| > \sqrt{n}\varepsilon) = \mathbb{P}(Z > \sqrt{n}\varepsilon) + \mathbb{P}(Z < -\sqrt{n}\varepsilon) = 2\mathbb{P}(Z < -\sqrt{n}\varepsilon) = 2F_Z(-\sqrt{n}\varepsilon)$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Cette quantité est strictement décroissante en n donc converge vers 0 quand $n \to \infty$. Etant donné que $\varepsilon > 0$ est arbitraire cela implique que $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Lemme 10. (inégalité de Markov) *Si X est une v.a. $\geqslant 0$ et intégrable (c-à-d $\mathbb{E}[X] < +\infty$) alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$$

Démonstration. Dans le cas où X admet une densité f on a que

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) = \int_0^\infty \mathbb{I}_{[\lambda, +\infty[}(x) f(x) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^\infty \frac{x}{\lambda} f(x) \mathrm{d}x = \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$$

car pour tout $x \geqslant 0$ on a $\mathbb{I}_{[\lambda, +\infty[}(x) \leqslant x/\lambda$. En général on observe que le même argument peut être appliqué à l'espérance mathématique

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{[\lambda, +\infty[}(X)] \leqslant \mathbb{E}[X/\lambda]$$

car si $F \leqslant G$ alors $0 \leqslant \mathbb{E}[F] \leqslant \mathbb{E}[G]$. □

Lemme 11. (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) *Si X est une v.a. réelle telle que $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) < \infty$ et $\mu = \mathbb{E}[X]$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a que*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Markov avec la v.a. $(X - \mu)^2$ on obtient que

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > \varepsilon) = \mathbb{P}((X - \mu)^2 > \varepsilon^2) \leqslant \mathbb{P}((X - \mu)^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

□

Théorème 12. (Loi faible des grandes nombres) *Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite iid tel que $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$ et $\mu = \mathbb{E}[X_i]$. On définit $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique des X_j. Alors*

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$$

Démonstration. On a que

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2} [\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)] = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, par l'inégalité de Tchebychev

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \to 0$$

pour $n \to \infty$. Donc $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$. □

Convergence presque sûre

Définition 13. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telles que X_n et X sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement (ou fortement) vers X et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si $\mathbb{P}(\lim_n X_n = X) = 1$. Autrement dit si l'événement $A = \{\omega \in \Omega : \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\}$ est tel que $\mathbb{P}(A) = 1$.*

Exemple 14. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid de v.a. $\sim \mathrm{Ber}(p)$ et $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Montrons que X_n/n^2 converge presque sûrement vers 0. En effet l'ensemble $A = \{0 \leqslant |X_n| \leqslant n \text{ pour tout } n\}$ est tel que $\mathbb{P}(A) = 1$. Donc pour $\omega \in A$ on a que $0 \leqslant |X_n(\omega)/n^2| \leqslant 1/n$ ce qu'implique que $\lim_n X_n(\omega)/n^2 = 0$ pour tout $\omega \in A$ et donc que

$$\mathbb{P}(\lim_n X_n/n^2 = 0) \geqslant \mathbb{P}(A) = 1$$

qui montre la convergence presque sure.

Théorème 15. *(Loi forte des grandes nombres) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid telle que les X_n soient intégrables (c-à-d $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$). Alors*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

Exemple 16. Soient X_1, X_2, ... des v.a. iid $\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$. X_1 est intégrable $(\mathbb{E}[|X_1|] = 1/\lambda)$. Alors

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} 1/\lambda.$$

Convergence en moyenne d'ordre r

Définition 17. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\mathbb{E}(\|X_n\|^r) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$ et que $\mathbb{E}[\|X\|^r] < +\infty$. On dit que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers X dans L^r (ou en moyenne d'ordre r), et on note $X_n \xrightarrow{L^r} X$ (ou $X_n \xrightarrow{r} X$) si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\|X_n - X\|^r] = 0.$$

En particulier: si $d = 1$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et X sont des v.a. réelles alors $X_n \xrightarrow{L^r} X$ si $\mathbb{E}[|X|^r] < \infty$, $\mathbb{E}[|X_n|^r] < \infty$ et $\mathbb{E}[|X_n - X|^r] \to 0$.

Exemple 18. Soit $r > 0$. Soit $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$. On considère $(X_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$X_n = n \mathbb{I}_{[0,1/n]}(U)$$

Quelle est la condition sur r pour que $X_n \xrightarrow{L^r} 0$?

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|^r] = \mathbb{E}[|X_n|^r] = \mathbb{E}[X_n^r] = \mathbb{E}[n^r \mathbb{I}_{[0,1/n]}(U)] = n^r \mathbb{P}(U \leqslant 1/n) = n^r/n$$

et n^{r-1} converge vers 0 ssi $r < 1$. On remarque que $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ et aussi en probabilité (et en loi). Voir plus avant pour les liens entre les modes de convergence.

Théorème 19. (Inégalité de Hölder) *Soient X et Y deux v.a. réelles définies sur le même espace de proba $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si $r, s > 1$ sont tels que $r^{-1} + s^{-1} = 1$ et si $\mathbb{E}[|X|^r] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|^s] < \infty$ alors*

$$\mathbb{E}[|XY|] \leqslant (\mathbb{E}[|X|^r])^{1/r} (\mathbb{E}[|Y|^s])^{1/s}.$$

Corollaire 20. *Soient $p > 0$ et $p > q > 0$. On suppose que $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|^q] \leqslant (\mathbb{E}[|X|^p])^{p/q}$ et $\mathbb{E}[|X|^q] < \infty$.*

Quelque propriétés de la convergence L^r.

Proposition 21. *Soit $r > 0$ et $0 < s < r$. Alors $X_n \xrightarrow{r} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{s} X$.*

Démonstration. Par l'inégalité de Holder on a $\mathbb{E}[|X_n - X|^s] \leqslant (\mathbb{E}[|X_n - X|^r])^{s/r}$. Donc si $X_n \xrightarrow{r} X$ alors $\mathbb{E}[|X_n - X|^r] \to 0$ et $\mathbb{E}[|X_n - X|^s] \to 0$. □

Proposition 22. *Si $X_n \xrightarrow{1} X$ alors $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.*

Démonstration. Par hypothèse on a que $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$. Donc

$$|\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X_n]| = |\mathbb{E}[X - X_n]| \leqslant \mathbb{E}[|X - X_n|] \to 0.$$

car $-|X_n - X| \leqslant X_n - X \leqslant |X_n - X|$. □

Proposition 23. *$X_n \xrightarrow{2} a \in \mathbb{R}$ (on di que X_n converge à la constante a en moyenne quadratique) ssi $\mathbb{E}[X_n] \to a$ et $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$.*

Démonstration. Si $X_n \xrightarrow{2} a \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{E}[|X_n - a|^2] \to 0$. Soit $\mu_n = \mathbb{E}[X_n]$

$$\mathbb{E}[|X_n - a|^2] = \mathbb{E}[|X_n - \mu_n + \mu_n - a|^2] = \mathbb{E}[(X_n - \mu_n)^2] + 2\mathbb{E}[(X_n - \mu_n)](\mu_n - a) + (\mu_n - a)^2$$

$$= \mathrm{Var}(X_n) + (\mu_n - a)^2$$

et donc $\mathrm{Var}(X_n) + (\mu_n - a)^2 \to 0$ ce qui entraîne que $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$ et que $\mu_n \to a$. Réciproquement si $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$ et $\mu_n \to a$ alors $\mathbb{E}[|X_n - a|^2] = \mathrm{Var}(X_n) + (\mu_n - a)^2 \to 0$. □

Liens entre les modes de convergence

Proposition 24.

i. La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité:

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

ii. La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

iii. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *si* $X = c \in \mathbb{R}$

iv. La convergence dans L^r *entraîne la convergence en probabilité*

$$X_n \xrightarrow{r} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

Théorème 25. (de continuité) *Soit* $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ *une fonction continue. Alors*

i. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$

ii. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$

iii. $X_n \xrightarrow{p.s.} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(X)$

Théorème 26. (Slusky) *Soient* $(X_n)_{n \geqslant 1}$, $(A_n)_{n \geqslant 1}$ *et* $(B_n)_{n \geqslant 1}$ *trois suites de v.a.. Soient* X *une v.a. et* $a, b \in \mathbb{R}$. *Si* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, $A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ *et* $B_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$ *alors*

$$A_n X_n + B_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX + b$$

Exemple 27. Soient les X_i des v.a. iid de loi $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. $\mathbb{E}[X_i] = \alpha/\beta$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \alpha/\beta^2$. Alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{G}(n\alpha, \beta)$ et $\overline{X}_n \sim \mathcal{G}(n\alpha, n\beta)$. Par la loi faible des grandes nombres $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha/\beta$ donc on obtient aussi que $\mathcal{G}(n\alpha, n\beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha/\beta$.

Théorème 28. *Soit* $(X_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite telle que*

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$$

alors $X_n \to 0$ *presque sûrement.*

Démonstration. Considérons la v.a. positive $S(\omega) = \sum_{n \geqslant 1} |X_n(\omega)|$. Par hypothèse on a que $\mathbb{E}[S] < +\infty$, donc la probabilité que $S < +\infty$ est égale à 1. Mais avoir $S(\omega) < +\infty$ implique que la série $\sum_{n \geqslant 1} |X_n(\omega)|$ est convergente et donc que $|X_n(\omega)| \to 0$ pour $n \to +\infty$. Comme cela arrive avec proba 1 on vient de montrer que $\mathbb{P}(\lim_n X_n = 0) = 1$ et donc que $X_n \to 0$ presque sûrement. $\square$

Le théorème central limite (TCL)

Théorème 29. *Soit* $(X_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite iid tel que* $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. *Soit* $\mu = \mathbb{E}[X_1]$. *Alors*

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration. Considérons la suite des v.a. $Y_n = (X_n - \mu)/\sigma$. On a que $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(Y_n) = 1$. De plus

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\, \bar{Y}_n = Z_n.$$

Considérons la fonction caractéristique de Z_n

$$\phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itZ_n}] = \mathbb{E}[e^{it(Y_1+\cdots+Y_n)/\sqrt{n}}] = (\mathbb{E}[e^{itY_1/\sqrt{n}}])^n = (\phi_{Y_1}(t/\sqrt{n}))^n$$

Dans la limite $n \to +\infty$ on peut substituer un développement limité de ϕ_{Y_1} autour de 0 :

$$\phi_{Y_1}(t) = \phi_{Y_1}(0) + \phi'_{Y_1}(0)t + \phi''_{Y_1}(0)\frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

avec $\phi'_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[Y_1] = 0$ et $\phi''_{Y_1}(0) = -\mathbb{E}[Y_1^2] = -1$ et donc

$$\phi_{Z_n}(t) = (1 - \frac{t^2}{2n} + O(t^3/n^{3/2}))^n \to \exp(-\frac{t^2}{2})$$

qui est la fonction caractéristique d'une gaussienne standard. □

Exemple 30. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. iid $\sim \mathcal{E}(\lambda)$. $\mathrm{Var}(X_1) = 1/\lambda^2$ et $\mu = \mathbb{E}[X_1] = 1/\lambda$. Par le TCL on a

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - 1/\lambda}{1/\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1/\lambda^2).$$

Théorème 31. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tels que la matrice de covariance Σ de X_1 est finie (c-à-d si $\Sigma_{ii} < \infty$ pour $i = 1, \ldots, d$) alors*

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0, \Sigma).$$

La δ-méthode

Théorème 32. *(La δ-méthode, cas unidimensionnel) Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. réelles. On suppose que $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continûment dérivable au point μ (c-à-d g est C^1 dans un voisinage du point μ) alors*

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(\mu))^2\sigma^2).$$

Exemple 33. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid $\sim \mathcal{E}(\lambda)$. Soit $Y_n = \overline{X}_n$. Par le TCL on a que $\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1/\lambda^2)$. Soit $g(x) = 1/x$. $g'(x) = -1/x^2$ et $g'(1/\lambda) = -\lambda^2$. Donc $(g'(1/\lambda))^2 = \lambda^4$ et g est continûment dérivable au point $1/\lambda$. Par la δ-méthode on a que

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$$

Exemple 34. (Normalisation de la variance) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid $\sim$ Bernoulli(p) (avec $p \in]0,1[$), $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) = p(1-p)$. Par le TCL $\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p))$. Peut on trouver une application g: $]0, 1[\to \mathbb{R}$ (qui ne dépend pas de p) telle que $\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(p)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$?

Supposons que une telle application existe et qu'elle soit continûment dérivable au point p. Par la δ-méthode on doit avoir que $g'(p)^2 p(1-p) = 1 \Longrightarrow g'(p)^2 = 1/(p(1-p))$ pour tout $p \in]0,1[$. Une solution possible est

$$g'(p) = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \Longrightarrow g(p) = 2\arcsin(\sqrt{p})$$

donc on a que

$$2\sqrt{n}(\arcsin(\sqrt{\bar{X}_n}) - \arcsin(\sqrt{p}))\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1).$$