TD2. Arrêt optimal

Exercice 1. (LE PROBLEME DE MOSER) Il s'agit du problème d'arrêt optimal suivant. Soient $X_1, ..., X_N$ des v.a. iid positives avec fonction de répartition F et moyenne $\mathbb{E}[X_i]$ finie. On imagine connaître la loi F. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ et $Y_n = X_n$: on observe en séquence N réalisations indépendantes de F, notre gain est la dernière valeur observée avant de s'arrêter. L'horizon est N: si nous ne nous arrêtons pas avant N on est obligé d'accepter le gain $Y_N = X_N$.

a) Montrer que la fonction valeur Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$ pour tout $1 \leqslant n \leqslant N$ (sugg: utiliser que $Y_n \hat{\in} \sigma(X_n)$ et une recurrence retrograde)

b) Soit $V_n = \mathbb{E}[Z_n]$. Montrer que $V_n = \varphi(V_{n+1})$ où $\varphi(x) = \mathbb{E}[\sup(X_1, x)]$.

c) Montrer que φ est une fonction positive et croissante, telle que $\varphi(x) - x$ est decroissante et $\varphi(x) - x \to 0$ si $x \to +\infty$.

d) Montrer que une regle optimale est

$$T^\star = \inf\{k \leqslant N : X_k \geqslant V_{N-k}\}$$

e) Soit $X_i \sim \mathcal{U}([0,1])$ pour $1 \leqslant i \leqslant N$ et $N = 6$. Montrer que la strategie optimale est donné par la procedure suivante: s'arrêter au temps 1 si $X_1 \geqslant 0.775$, s'arrêter au temps 2 si $X_2 \geqslant 0.742$, s'arrêter au temps 3 si $X_3 \geqslant 0.695$, s'arrêter au temps 4 si $X_2 \geqslant 0.625$, s'arrêter au temps 5 si $X_5 \geqslant 1/2$ ou s'arrêter à 6.

Exercice 2. (PROBLEME DE LA SECRETAIRE) Il s'agit de choisir parmi N objet le meilleur. On a le droit d'inspecter un objet à la fois et de décider de le choisir et donc s'arrêter ou de passer à l'inspection du suivant. Ce n'est pas possible de revenir sur ses propres pas: chaque fois on ne peut seulement garder que le dernier objet ou continuer. On veut déterminer une stratégie d'arrêt qui nous permet de maximiser la probabilité de choisir l'objet qui est le meilleur parmi les N à notre disposition. Ce problème porte le nom de « problème de la princesse » où, dans la littérature anglo-saxonne, problème classique de la secrétaire (CSP - classic secretary problem).

Le modèle mathématique est basé sur un espace d'états Ω donné par les possible permutations des N objets: $\omega \in \Omega$ est un vecteur $\omega \in \{1, ..., N\}^N$ tel que $\omega(i) \neq \omega(j)$ si $i \neq j$ pour tout $i, j = 1, ..., N$. Sur Ω on considère la distribution uniforme qui donne le même poids $1/N!$ à chaque permutation. La valeur $\omega(i)$ est le rang absolu de l'n-ème objet inspecté, donc si $\omega(i) = 1$ le meilleur objet se trouve dans la position i. On remarque qu'on ne peut pas observer directement les ω (on ne connaît pas le classement des objets jusqu'a ce qu'on ai inspecté tous les N objets). A chaque pas n on observe une variable $X_n(\omega)$ qui donne le rang *relatif* de l'n-ème objet inspecté par rapport à tous les $n-1$ objets inspectés auparavant. Donc $X_1 = 1$, $X_2 \in \{1, 2\}$,..., $X_n \in \{1, ..., n\}$ et $X_N(\omega) = \omega(N)$: une fois que j'ai inspecté tous les objets je connais leur classement absolu. A chaque instant n je connais $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ la tribu engendrée par le rangs relatifs des premiers n objets. Exemple: si $N = 4$ et $\omega = (3, 4, 1, 2)$ alors $X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 2, X_3(\omega) = 1$, $X_4(\omega) = 2$. Soit $\Xi = \{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{N}^N : 1 \leqslant x_k \leqslant k, k = 1, ..., N\}$ l'ensemble des valeurs possibles pour le vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_N)$. On remarque que l'application $X: \Omega \to \Xi$ que envoie chaque possible permutation des N objet vers la correspondante suite des rangs relatifs est bijective, i.e. existe $\Psi: \Xi \to \Omega$ telle que $\Psi(X(\omega)) = \omega$. Ce qu'il est équivalent à dire que donné la suite des rangs relatifs $x_1, ..., x_N$ on peut reconstruire le valeurs de $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$.

a) Montrer que pour tout $(x_1, ..., x_N) \in \Xi$ on a

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N) = 1/N!$$

b) Monter que pour tout $n \leqslant N$ on a que $\mathbb{P}(X_n = j) = 1/n$ pour $j = 1, ..., n$ et que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.

c) L'objectif est de trouver une stratégie d'arrêt (donné par un t.a.) qui nous permet de optimiser la probabilité de choisir l'objet meilleur parmi les N disponibles. Autrement dit on veut maximiser $\mathbb{P}(\omega(T) = 1) = \mathbb{E}[1_{\omega(T)=1}]$ pour tout T t.a. de la filtration $\mathcal{F}$ et borné par N. On défini un processus adapté Y par $Y_k = \mathbb{E}[1_{\omega(k)=1} | \mathcal{F}_k] \in \mathcal{F}_k$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\omega(T) = 1) = \mathbb{E}[Y_T].$$

d) Montrer que $Y_n = 1_{X_n=1} \frac{n}{N}$ et donc que $Y_n \hat{\in} \sigma(X_n)$.

e) Montrer que $Z_n \hat{\in} \sigma(X_n)$ et donc que un temps d'arrêt optimal est donné par

$$T^\star = \inf \{k \leqslant N : \mathbb{E}(Z_{k+1}) \leqslant k/N, X_k = 1\}$$

f) Montrer que $\mathbb{E}[Z_n]$ est une fonction decroissante de n et donc que il existe r tel que

$$T^\star = T_r = \inf \{r \leqslant k \leqslant N : X_k = 1\} \cup \{N\}$$

g) Montrer que pour tout $1 \leqslant r \leqslant N$:

$$G_N(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}] = \mathbb{P}(\omega(T_r) = 1) = \frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^{N} \frac{1}{k-1}$$

h) Montrer que $\lim_{N \to \infty} G_N(xN) = -x \log x$ et que cette fonction à un maximum pour $x = 1/e \simeq 0.37$. Donc dans la limite d'un grand nombre d'objects la strategie optimale est de ne laisser defiler une proportion du 37% et apres choisir le premier meilleur de tout les precedents.

Exercice 3. (Le problème du stationnement) Ce problème est du à MacQueen et Miller (1960). On conduit une voiture sur une voie infinie à la recherche d'une place de stationnement mais les places ne sont pas forcement toujours libres. L'objectif c'est de se garer le plus proche possible du théâtre sans pouvoir revenir en arrière. On voit une place libre à distance d du théâtre. Est-que on doit s'y garer?

On imagine un modèle discret. On part de l'origine et on voit des places de stationnement a tout point entiers sur la droite réelle. Soient $X_0, X_1, ...$ des Bernoulli iid de paramètre $p \in]0, 1[$ telles que $X_n = 1$ signifie que l'n-ème place est déjà occupé et $X_n = 0$ signifie que il est libre. Soit N la position du théâtre. On peut s'arrêter à la place n ssi $X_n = 0$ et si on décide de s'arrêter la on perd la quantité $|n - N|$. Quand on est à n on ne peut pas voir si la place $n + 1$ est libre et si on passe outre on ne peut plus revenir en arrière. Si on arrive à la place N et si elle n'est pas libre alors on va prendre la première place libre qui on trouve en continuant, dans ce cas la perte attendue est donnée par $(1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + \cdots = 1/(1-p)$.

1. Formuler le problème d'arrêt optimale: donner la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,...,N}$, les pertes $(Y_n)_{n=0,...,N}$ et spécifier la définition d'optimalité pour un t.a. T.

2. Utiliser l'hypothèse d'indépendance des X_n et la forme spécifique des gains Y_n pour simplifier la forme de la fonction valeur Z et de la règle d'arrêt optimale associé.

3. Remarquer que la règle optimale est de la forme $T_r = \inf \{n \in [r, N] : X_n = 0\}$.

4. Montrer que la perte moyenne $C(r) = \mathbb{E}[Y_{T_r}]$ si on utilise T_r est donné par la formule

$$C(N-n) = n + 1 + \frac{2p^{n+1} - 1}{1-p}, \qquad n = 0, \ldots, N$$

5. Trouver le r optimale en fonction de p et N pour $p = .9$.

Exercice 4. (Une variation sur le problème de la princesse) Considérer le problème de la princesse avec la fonction de gain suivante:si on s'arrêt au temps n alors on gain $Y_n = 1$ si on choisit l'objet meilleur, $Y_n = -1$ si l'objet choisi n'est pas le meilleur. On se donne aussi la possibilité de ne pas choisir aucun des N objets dans quel cas notre gain est 0.

1. Donner une formule pour le gain Y_n pour $n = 1, \ldots, N$.

2. Observer que cette variante donne un gain qui est plus petit du gain dans le problème classique.

3. Montrer que une règle d'arrêt optimale est de la forme $T_r = \inf\{n \in [r, N]: X_n = 1\}$.

4. Soit r_* la valeur optimale de r. Montrer que $r_*/N \to 1/\sqrt{e}$ quand $N \to \infty$.

Exercice 5. (Sum-of-the-odds) Soit $N \geqslant 1$ et $X_1, \ldots, X_N$ des v.a. indépendantes telles que $X_j \sim \text{Bernoulli}(p_j)$ avec $p_j \in [0, 1]$, $j = 1, \ldots, N$. On observe les $\{X_j\}_{j=1,\ldots,N}$ une à la fois et on peut s'arrêter à tout moment. Si on s'arrêt à j on gagne si $X_j = 1$ et si $X_k = 0$ pour $j \leqslant k \leqslant N$ (c-à-d si X_j est la dernière v.a. à valoir 1). Soit $L = \sup\{k \in [1, N]: X_k = 1\}$ (on utilise la convention que $\sup \emptyset = +\infty$). La probabilité de gagner en s'arrêtant au temps d'arrêt T est donc

$$V(T) = \mathbb{P}(T = L) = \mathbb{P}(X_T = 1, X_{T+1} = 0, \ldots, X_N = 0).$$

On veut maximiser la probabilité de victoire parmi tous les t.a. T bornés par N et associés à la filtration $\{\mathcal{F}_k\}_{k=1,\ldots,N}$ engendrée par les $\{X_k\}_{k=1,\ldots,N}$. On note $V_N = \sup_{T \leqslant N} V(T)$ le gain optimal pour le problème d'arrêt d'horizon N.

a) Donner la définition de temps d'arrêt. La v.a. L est-elle un temps d'arrêt?

b) Montrer que $Y_k = \mathbb{P}(L = k | \mathcal{F}_k) = \prod_{j=k+1}^{N} (1 - p_j) \mathbb{I}_{X_k = 1}$ pour $k = 1, \ldots, N$.

c) Montrer que l'on peut écrire la probabilité de victoire $V(T) = \mathbb{P}(L = T)$ en s'arrêtant au t.a. T comme $\mathbb{E}[Y_T]$.

d) Montrer par un calcul explicit que $\mathbb{E}[Z_N | \mathcal{F}_{N-1}]$ est une constante.

e) Montrer par induction que $\mathbb{E}[Z_{k+1} | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[Z_{k+1}]$ pour tout $k = 1, \ldots, N-1$.

f) Montrer que $\mathbb{E}[Z_k], k = 1, \ldots, N$ est une fonction décroissante de k.

g) Rappeler la définition de $T^\star$ et montrer qu'il est un temps d'arrêt pour $\mathcal{F}$.

h) Quelle est la proprieté principale du processus arrête $(Z_{k \wedge T^\star})_{k=1,\ldots,N}$? (Eventuellement donner une preuve).

i) Montrer qu'il existe un entier $r \in [1, N]$ tel que $T^\star = T_r$ où

$$T_r = \inf_N \{k \in [r, N]: X_k = 1\}$$

(Rappel: $\inf_N A = \inf A$ si $A \neq \emptyset$ et $\inf_N A = N$ si $A = \emptyset$).

j) Montrer que

$$G(r) = V(T_r) = \left[\prod_{k=r}^{N} (1-p_k)\right] \sum_{k=r}^{N} \frac{p_k}{1-p_k}.$$

et donc que la règle d'arrêt optimale est T_{r_*} où r_* est la valeur qui maximise $G(r)$.

k) Donner une expression pour $\mathbb{E}[Z_1]$.

l) Calculer $G(r) - G(r-1)$ pour $r = 2, \ldots, N$ et donner une condition explicite pour r_*.

m) Calculer $r_\star$ et $G(r_\star)$ pour $N = 10$ et $p_k = 0.2$ pour $k = 1, \ldots, 10$.

Exercice 6. (Le jeu Googol) Soit θ une v.a.de loi de Pareto $\mathcal{P}a(\alpha,\, 1)$. La loi de Pareto $\mathcal{P}a(\alpha, x)$ est la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$f(\theta) = \alpha x^{\alpha}\, \theta^{-\alpha-1}\, \mathbb{I}_{\theta > x}$$

où $\theta > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. qui conditionnellement à θ sont i.i.d. avec loi uniforme sur $[0, \theta]$. Soit $M_0 = X_0 = 1$ et pour $j = 1, \ldots, n$ soit $M_j = \max\,(X_0, \ldots, X_j) = \max\,(M_{j-1}, X_j)$. On observe les $\{X_j\}_{j=0,\ldots,n}$ une à la fois et on peut s'arrêter à tout moment. Quand on s'arrête on gagne si la dernière v.a. X_j observée est la plus grande parmi toutes les $\{X_j\}_{j=0,\ldots,n}$ (X_0 comprise). On veut maximiser la probabilité de victoire parmi tous les t.a. associés à la filtration $\{\mathcal{F}_k\}_{k=1,\ldots,n}$ engendrée par les $\{X_k\}_{k=1,\ldots,n}$.

a) Les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont elles indépendantes ?

b) Montrer que la loi conditionnelle de θ sachant $X_1, \ldots, X_k$ est $\mathcal{P}a(k+\alpha, M_k)$.

c) Montrer que $Y_k = \mathbb{P}(X_k = M_n | X_1, \ldots, X_k) = ((k+\alpha)/(n+\alpha))\mathbb{I}_{X_k = M_k}$.

d) Montrer que $\mathbb{P}(X_k = M_k | X_1, \ldots, X_{k-1}) = 1/(\alpha + k)$ et donc que $\{X_k = M_k\}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{k-1}$.

e) Montrer que l'on peut donc écrire la probabilité de victoire en s'arrêtant au t.a. T comme $\mathbb{E}[Y_T]$.

f) Montrer par un calcul explicite que $\mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}]$ est une constante.

g) Montrer par induction que $\mathbb{E}[Z_{k+1} | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[Z_{k+1}]$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$.

h) Montrer que $\mathbb{E}[Z_k], k = 1, \ldots, n$ est une fonction decroissante de k.

i) Montrer qu'une stratégie d'arrêt optimale est de laisser passer $r-1$ nombres et ensuite de s'arrêter au premier $j \geqslant r$ tel que $X_j = M_j$, où r est un entier compris entre 1 et $n-1$. Soit T_r cette règle d'arrêt.

j) Montrer que

$$\mathbb{P}(X_{T_r} = M_n) = \frac{r-1+\alpha}{n+\alpha} \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j-1+\alpha}$$

et donc que la règle d'arrêt optimale est T_r où r est la valeur qui maximise cette expression.