TD2. Martingales, strategies et arrêt optionnel.

Exercice 1. Soient T, S deux temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ donnée.

a) Montrer que $T\wedge S$ et $T\vee S$ sont temps d'arrêt.

b) Montrer que si $n\geqslant 0$ et $A\in\mathcal{F}_n$ alors $T_{n,A}=(n+1)\mathbb{I}_A+n\mathbb{I}_{A^c}$ est un temps d'arrêt.

c) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté et integrable. Montrer que $T = \inf\{n \geqslant 0: \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]>X_n\}$ est un temps d'arrêt.

Exercice 2. Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et tel que $X_n\in L^1$ pour tout $n\geqslant 0$. Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale ssi $\mathbb{E}[M_T]=\mathbb{E}[M_0]$ pour tout T temps d'arrêt borné de $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Deux façon de proceder differentes montrent l'implication non-triviale:

1. Considerer les temps d'arrêt $T_{n,A}=(n+1)\mathbb{I}_A+n\mathbb{I}_{A^c}$ pour tout $n\geqslant 0$ et $A\in\mathcal{F}_n$ et conclure.

2. Imaginer que M_n est le gain dans un jeux d'hasard. La condition $\mathbb{E}[M_T]=\mathbb{E}[M_0]$ implique que n'importe quelle strategie d'arrêt donne le même gain moyen. Par absurde on imagine que M n'est pas une martingale par exemple car pour un quelque $n\geqslant 0$ on a $\mathbb{P}(A_{>,n})>0$ pour $A_{>,n}=\{\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]>M_n\}$. En exploitant cet evenement favorable on peut construire un temps d'arrêt S qui nous permet de obtenir un gain moyen $\mathbb{E}[M_S]>\mathbb{E}[M_0]$ en contradiction avec l'hypothése. Completer cet argument.

Exercice 3. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_i=1)=p=1-P(Y_i=-1)$. Soit $S_n=\sum_{i=1}^n Y_i$ (et $S_0=0$). Montrer que les processus $(W_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n)_{n\geqslant 0}$ définit par

$$W_n=S_n-(2p-1)n, \qquad W_0=0$$

et

$$M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}, \qquad M_0=1$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle des Y_n: $\mathcal{F}_n=\sigma(Y_1,\dots,Y_n)$ pour $n\geqslant 1$ et $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$.

Exercice 4. Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, telle que $\mathbb{E}(M_n^2)<+\infty$ pour tout $n\geqslant 0$. Soit

$$A_n=\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big([\Delta M_i]^2|\mathcal{F}_{i-1}\big) \tag{1}$$

Montrer que $M_n^2-A_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale ($\Delta M_i=M_i-M_{i-1}$).

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n=\pm 1)=1/2$. Dans la suite on considère la filtration naturelle des X comme filtration de référence. Fixons $a>0$. On pose

$$Y_0=a, \qquad Y_n=a+\sum_{k=1}^n 2^{k-1}a X_k \qquad n\geqslant 1.$$

C'est le gain dans un jeux de pile ou face où je double chaque fois la mise. J'aimerais m'arrêter de que je gagné la première fois, à cet effet on va introduire le processus suivante

$$G_0 = a, \qquad G_n = a + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a X_k \mathbb{I}_{X_1 = \cdots = X_{k-1} = -1}.$$

et la v.a. $T = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = 1\}$ qui donne l'instant de temps où je gagné la première fois.

a) Donner une interprétation intuitive du processus $(G_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

c) Montrer que $G_n \hat{\in} \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ et que $\{T = n\} \in \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

d) Montrer que $G_n = Y_{n\wedge T}$ pour tout $n \geqslant 1$.

e) Montrer que $(G_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

f) Soit $D = |G_{T-1}|$. Montrer que $\mathbb{E}[D] = +\infty$. Interpréter cet résultat.

Exercice 6. Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ deux sur-martingales et T un temps d'arrêt fini ($\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$) tel que $X_T \geqslant Y_T$. Montrer que le processus $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ defini par

$$Z_n = X_n \mathbb{I}_{T > n} + Y_n \mathbb{I}_{T \leqslant n}$$

est une sur-martingale.

Exercice 7. (LA RUINE DU JOUEUR) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = +1) = p \in]0,1[$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration naturelle des X. On fixe un entier $N > 0$ on pose $S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geqslant 1$ avec $x \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Soit $T = \inf\{n \geqslant 0 : S_n = 0 \,\text{ou}\, S_n = N\}$.

a) Montrer que T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbb{P}(T \geqslant n + N | \mathcal{F}_n) \leqslant 1 - \min(p, q)^N = c < 1$.

c) Montrer que $\mathbb{P}(T \geqslant kN) \leqslant c^k$ pour tout $k \geqslant 1$. En déduire que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

d) Soit $M_n = (q/p)^{S_n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

e) Soit $Y_n = M_{n\wedge T}$. Montrer que $Y_{n+1} = Y_n(\mathbb{I}_{T\leqslant n} + (q/p)^{X_{n+1}} \mathbb{I}_{T > n})$ et que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale (utiliser l'équation récursive pour Y ou le théorème d'arrêt optionnel).

f) En déduire une expression pour $\mathbb{P}(X_T = 0)$ en fonction de x.

Exercice 8. Soit G une v.a. géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (c-à-d $\mathbb{P}(G = k) = p^k(1 - p)$, $k \in \mathbb{N}$). Soit pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(G \wedge (n + 1))$.

a) Montrer que $\mathcal{F}_n = \sigma(\{\{G = 0\}, \{G = 1\}, \ldots, \{G = n\}, \{G > n\}\})$.

b) Montrer que $M_n = \mathbb{I}_{G\leqslant n} - (1 - p)(G \wedge n)$ et $Y_n = M_n^2 - p(1 - p)(G \wedge n)$, $n \geqslant 0$ sont deux martingales pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. telle que X_n est une v.a. choisie uniformément dans l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, \ldots, Z\}$ ($\#\mathcal{A} = 26$). Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ la filtration naturelle des X ($\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). On considère la suite comme une chaîne de symboles. Soit T le premier instant où on voit apparaitre la chaîne « AB » dans la suite $X_1 X_2 \cdots X_n \cdots$ (formellement $T_{\mathrm{AB}} = \inf\{n \geqslant 2 : X_n = B, X_{n-1} = A\}$). On veut calculer $\mathbb{E}[T]$ le temps moyen d'apparition du mot « AB ».

a) Soit $Y_n = \sum_{k=2}^{n} 26^2\, \mathbb{I}_{X_k = B, X_{k-1} = A} + 26 \mathbb{I}_{X_n = A}$. Montrer que $M_n = Y_n - n$ est une martingale. Donner une interpretation de M en terms de gain dans un jeux d'hasard.

b) Montrer que il existe une constante $0<c<1$ telle que $\mathbb{P}(T_{\mathrm{AB}}>n) \leqslant c^n$. En déduire que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{AB}}]<+\infty$ et $\mathbb{P}(T_{\mathrm{AB}}<+\infty)=1$.

c) Montrer que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{AB}}]=\mathbb{E}[Y_{T_{\mathrm{AB}}}]=26^2$.

d) Soit $T_{\mathrm{BB}}=\inf\{n \geqslant 2 \colon X_n=B, X_{n-1}=B\}$. Montrer que $\mathbb{E}[T_{BB}]=26^2+26$.

e) Soit $T_{\mathrm{ABRACADABRA}}$ le premier instant où on voit apparaitre la chaîne « ABRACA-DABRA ». Montrer que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{ABRACADABRA}}]=26^{11}+26^4+26$.