[M. Gubinelli - Processus discrets - M1 MMD 2010/2011 - 20101019 - poly 2 - v.4]

2 Martingales et stratégies

1 Processus, filtrations et temps d'arrêt

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus stochastique $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite infinie des v.a. indexées par $\mathbb{N}$. Alternativement on peut considérer l'application mesurable X: $\Omega \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est une suite réelle et pour tout $n \geqslant 0$, X_n est une v.a. réelle.

Définition 1. *Une filtration est une famille $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. On pose toujours $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ ($\mathcal{F}_\infty$ est la plus petite tribu qui contienne toutes les $\mathcal{F}_n$ pour $n \geqslant 0$). Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus stochastique, sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geqslant 0}$ est la filtration définie par $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.*

Définition 2. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus stochastique et $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ une filtration, on dit que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est adapté (à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$) ssi $X_n \hat{\in} \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geqslant 0$. On dit que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est prévisible (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$) ssi $X_n \hat{\in} \mathcal{F}_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 0$. La filtration naturelle de X est la plus petite filtration qui rende X adapté.*

Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ représente l'information accumulée à fur et à mesure que le temps passe. Un processus adapté $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est un processus qu'on découvre progressivement: à l'instant $n \geqslant 0$ on dispose de l'information contenue dans $\mathcal{F}_n$ et on peut déterminer la valeur de X_k pour tout $k \leqslant n$ (ce que est arrivé au processus X dans le passé) mais à priori on ne peut pas déterminer précisément la valeur de X_k pour $k > n$ (la valeur du processus X dans le futur).

Exemple 3. (MARCHE ALÉATOIRE) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. et $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ sa filtration naturelle ($\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$). On pose $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$ avec $S_0 \hat{\in} \mathcal{F}_0$ (une constante). Alors $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 1.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$.

b) Monter que le processus $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ défini par récurrence par

$$Y_0 = 1, \quad Y_n = Y_{n-1} \mathbb{I}_{X_n = 1} \text{ pour } n \geqslant 1$$

est un processus adapté à la filtration naturelle des $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Supposons de jouer à pile ou face en misant 1€ à chaque fois et que X_n représente le gain dans la n-éme partie: $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = 1/2$. Le processus $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$ représente alors le gain total après les premières n parties. On permet $S_n < 0$: dans ce cas on imagine que $(S_n)_-$ représente la quantité d'argent empruntée (au casino, par exemple) pour nous permettre de continuer à jouer. Bien évidemment:

$$\mathbb{E}[S_n] = S_0 + n\,\mathbb{E}[X_1] = S_0,$$

dans un jeu équitable le gain moyen est nul.

On voudrait se permettre de quitter le jeu à un instant que peut dépendre le l'issue du jeu même, en autre termes, quitter le jeu à un instant *aléatoire* $T: \Omega \to \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ($T = +\infty$ c'est pour nous permettre de continuer à jouer pour toujours...). Il est claire que l'on ne peut pas accepter n'importe quelle v.a. T comme stratégie d'arrêt. Voyons quelques exemples:

1. Je quitte des que je perd la première fois: $T_1 = \inf\{n \geqslant 1: X_n = -1\}$
2. Je quitte des que je gagne au moins 100€ : $T_2 = \inf\{n \geqslant 1: S_n \geqslant S_0 + 100\}$

3. Je quitte juste avant de perdre la première fois: $T_3 = \inf\{n \geqslant 0 : X_{n+1} = -1\}$

Les stratégies 1 et 2 sont acceptables, par contre la stratégie 3 demande de la prevoyance. Les deux premières stratégies sont données par des temps d'arrêt, la dernière non, selon la définition suivante.

Définition 4. *Une v.a.* $T:\Omega \to \mathbb{N}_* = \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ *est un temps d'arrêt si* $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ *pour tout* $0 \leqslant n \leqslant +\infty$. *De manière équivalente* T *est un t.a. ssi* $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ *pour tout* $0 \leqslant n \leqslant +\infty$.

Exemple 5. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ un processus adapté et A un borelien de $\mathbb{R}$, alors

$$T_A = \inf\{n \geqslant 1 : X_n \in A\}$$

(avec $\inf(\varnothing) = +\infty$) est un temps d'arrêt: pour tout $0 \leqslant n \leqslant +\infty$ on a

$$\{T \leqslant n\} = \cup_{0<k\leqslant n}\{X_k \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Exercice 2. Montrer que T_2 est un temps d'arrêt et que T_3 non.

Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est un processus aléatoire on note $X_T:\Omega \to \mathbb{R}$ la v.a. donnée par

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega), \qquad \omega \in \Omega$$

Exercice 3. Montrer que si T est un t.a. et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté alors le processus $X_n^T(\omega) = X_{n\wedge T(\omega)}(\omega)$ est encore adapté. Il s'appelle *processus arrêté en* T.

Si on utilise une stratégie d'arrêt T dans le jeu du pile ou face on obtient un gain final de S_T. Le résultat suivant donne la moyenne de cette v.a.

Théorème 6. *(*IDENTITÉ DE WALD*) Soit* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *un processus i.i.d. tel que* $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ *et* T *un temps d'arrêt pour la filtration engendrée par les* X. *Si* $\mathbb{E}[T] < +\infty$ *alors*

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}[X_1]$$

où $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Démonstration. On note que

$$S_T(\omega) = \sum_{n\geqslant 1} X_n(\omega)\mathbb{I}_{n\leqslant T(\omega)}, \qquad T(\omega) = \sum_{n=1}^{T(\omega)} 1 = \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{I}_{n\leqslant T(\omega)}$$

les sommes étant finies p.s. car $\mathbb{E}[T] < +\infty$ et donc $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. En majorant $|S_T|$ on a

$$|S_T| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |X_n|\mathbb{I}_{n\leqslant T}.$$

Par Fubini (la fonction est positive)

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n\geqslant 1}|X_n|\mathbb{I}_{n\leqslant T}\Big] = \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}_{n\leqslant T}]$$

Comme T est un temps d'arrêt on a $\{T \geqslant n\} = \{T < n\}^c = \{T \leqslant n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$ et par les propriétés de l'espérance conditionnelle

$$\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{I}_{n\leqslant T}] = \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_n|\underbrace{\mathbb{I}_{n\leqslant T}}_{\in\mathcal{F}_{n-1}}|\mathcal{F}_{n-1}]] = \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\underbrace{|X_n|}_{\perp\!\!\!\perp\,\mathcal{F}_{n-1}}|\mathcal{F}_{n-1}]\mathbb{I}_{n\leqslant T}]$$

$$= \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[|X_n|]\mathbb{E}[\mathbb{I}_{n\leqslant T}] = \mathbb{E}[|X_1|]\mathbb{E}\Big[\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{I}_{n\leqslant T}\Big] = \mathbb{E}[|X_1|]\mathbb{E}[T]$$

ce qui montre que la fonction $(\omega, n) \mapsto |X_n(\omega)|\mathbb{I}_{n\leqslant T(\omega)}$ est intégrable par rapport à la mesure $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ sur $\Omega\times\mathbb{N}$ où $\mathbb{Q}$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Nous avons donc le droit d'utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour la fonction $(\omega, n) \mapsto X_n(\omega)\mathbb{I}_{n\leqslant T(\omega)}$. Par le même raisonnement nous obtenons

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}\Big[\sum_{n\geqslant 1}X_n\mathbb{I}_{n\leqslant T}\Big] \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[X_n\mathbb{I}_{n\leqslant T}] \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{n\geqslant 1}\mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[\mathbb{I}_{n\leqslant T}] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[T].$$

$\square$

L'identité de Wald appliquée au jeu du pile ou face (équitable) nous donne que peu importe la stratégie d'arrêt qu'on utilise, si on triche pas (en regardant dans le futur) le gain moyen $\mathbb{E}[S_T] - S_0$ sera toujours nul.

Remarque 7. La condition d'integrabilité sur T dans l'identité de Wald est très importante. Considérons le temps d'arrêt $T = T_2 = \inf \{n \geqslant 1: S_n \geqslant S_0 + 100\}$. Alors par definition $T < +\infty \Rightarrow S_T = S_0 + 100$ mais si l'on pouvait appliquer l'identité on obtiendrait $S_0 = \mathbb{E}[S_T] = S_0 + 100$! Cela montre que dans ce cas, nécessairement $\mathbb{E}[T] = +\infty$. (En effet si $\mathbb{E}[T] < +\infty$ alors $T < +\infty$ p.s. et $S_T = S_0 + 100$ p.s.)

Remarque 8. En général, si le processus $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est adapté et intégrable (c-à-d $X_n \in L^1$ pour tout $n \geqslant 0$) et T est un temps d'arrêt borné (c-à-d tel que il existe un entier $N < +\infty$ pour lequel $\mathbb{P}(T \leqslant N) = 1$) alors $X_T \in L^1$ car

$$|X_T| = |\sum_{n=1}^{N} X_n \mathbb{I}_{T=n}| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |X_n| \mathbb{I}_{T=n} \in L^1$$

étant somme finie de v.a. dans L^1.

Après ces observations il est intéressant d'étudier la classe $\mathcal{M}$ des processus $(X_n)_{n \geqslant 0}$ adaptés et intégrables tels que

$$\mathbb{E}[X_T] = X_0 \qquad \text{pour tout t.a. } T \text{ borné.} \tag{1}$$

ce que reviendrait à considérer $(X_n)_{n \geqslant 0}$ comme le gain dans un jeu équitable qui n'admet pas de stratégie d'arrêt qui soit gagnante en moyenne. Par l'identité de Wald, toute somme partielle de suites iid à moyenne nulle satisfait cette contrainte. On se demande donc les propriétés générales de tels processus.

Une propriété qui s'est révélée basique pour caractériser et étudier cette classe de processus est la suivante :

Lemme 9. *Le processus $(X_n)_{n \geqslant 0}$ adapté et intégrable, satisfait (1) ssi pour tout $n \geqslant 0$*

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n \qquad p.s. \tag{2}$$

Démonstration. Montrons d'abord que (2) $\Rightarrow$ (1). Pour tout $n \geqslant 0$ et $A \in \mathcal{F}_n$ on considère le t.a. (vérifier)

$$T_{n,A}(\omega) = \begin{cases} n+1 & \text{si } \omega \in A \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

alors la condition $\mathbb{E}[X_{T_{n,A}}] - X_0 = 0$ donne

$$0 = \mathbb{E}[X_{n+1} \mathbb{I}_A + X_n(1 - \mathbb{I}_A)] - X_0 = \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n) \mathbb{I}_A] + \mathbb{E}[X_n] - X_0 = \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n) \mathbb{I}_A]$$

(car $\mathbb{E}[X_n] = X_0$ par définition de la classe $\mathcal{M}$). Cette dernière égalité est vraie pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ et donc aussi pour toute fonction $G \hat{\in} \mathcal{F}_n$ bornée ce qui nous donne que $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] = 0$ p.s.

Montrons maintenant que (2) $\Rightarrow$ (1) : soit T un t.a. bornée et N tel que $T \leqslant N$. Notons d'abord que la condition (2) et implique que pour tout $k > n$

$$\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{k-1}] | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{k-1} | \mathcal{F}_n] = \cdots = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] = X_n$$

car $\mathcal{F}_k \supseteq \mathcal{F}_n$ pour tout $k \geqslant n$. Donc $\mathbb{E}[X_N | \mathcal{F}_n] = X_n$ pour tout $n \leqslant N$ et aussi $\mathbb{E}[X_N] = X_0$ en prenant l'espérance des deux côtes avec $n = 0$. Grâce aux hypothèses d'integrabilité de X_n et bornitude de T on a que

$$\mathbb{E}[X_T] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[X_n \mathbb{I}_{n=T}] \stackrel{\text{eq. (2)}}{=} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_N | \mathcal{F}_n] \underbrace{\mathbb{I}_{n=T}}_{\hat{\in} \mathcal{F}_n}] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_N \mathbb{I}_{n=T} | \mathcal{F}_n]]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[X_N \mathbb{I}_{n=T}] = \mathbb{E}[X_N] = X_0 \,.$$

ce qui donne la propriété (1). □

L'equation (2) peut etre interpreté en terms de jeux en disant que dans un jeu equitable si $X_{n+1} - X_n$ represente le gain dans la $(n+1)$ partie alors, conditionellement à tout ce que c'est passé avant (c-à-d conditionellement à $\mathcal{F}_n$), ce gain est en moyenne nul: $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0$.

Remarque 10. La preuve du théorème précédent montre (implicitement) que si la condition $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0$ n'est pas toujours vérifiée on peut construire une stratégie d'arrêt T telle que $\mathbb{E}[X_T] \neq X_0$.

En effet supposons que il existe $n > 0$ tel que l'événement $A = \{\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] > 0\}$ (par exemple, un raisonnement similaire marche dans le cas < 0) ait une probabilité positive : $\mathbb{P}(A) > 0$. Notons que $A \in \mathcal{F}_n$ (vérifier) et donc que à l'instant n on sait si on est dans l'événement A ou pas. La stratégie est la suivante: si on est dans A on s'arrête à l'instant $(n+1)$, sinon on s'arrête à l'instant n. L'idée c'est que si on est dans A alors on sait que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] > X_n$ et donc que si on joue encore une fois en moyenne on gagne quelque chose en plus. On pose donc $T = (n+1)\mathbb{I}_A + n\mathbb{I}_{A^c}$. Avec cette stratégie d'arrêt on obtient:

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbb{I}_A + X_n\mathbb{I}_{A^c}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_A + X_n\mathbb{I}_{A^c}] > \mathbb{E}[X_n\mathbb{I}_A + X_n\mathbb{I}_{A^c}] = \mathbb{E}[X_n] = X_0.$$

L'inégalité stricte est due au fait que la v.a. $Q = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_A - X_n\mathbb{I}_A \geqslant 0$ et que $Q > 0$ avec probabilité positive $\mathbb{P}(Q > 0) = \mathbb{P}(A) > 0$. Cela entraine que $\mathbb{E}[Q] > 0$ et donc que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_A] > \mathbb{E}[X_n\mathbb{I}_A]$.

On va appeler les processus satisfaisant (2) des *martingales*. Dans la suite on va étudier leurs propriétés générales.

2 Martingales

Définition 11. *Un processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ réel, adapté et intégrable (c-à-d tel que $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ pour tout $n \geqslant 0$) est*

i. une martingale ssi $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ p.s. pour tout $n \geqslant 0$;

ii. une sur-martingale ssi $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant X_n$ p.s. pour tout $n \geqslant 0$;

iii. une sous-martingale ssi $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqslant X_n$ p.s. pour tout $n \geqslant 0$.

Si on interprète $(X_n)_{n\geqslant 0}$ comme les gains dans un jeu de hasard et la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ comme l'information disponible à chaque instant de temps, alors une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale est un jeu défavorable et une sous-martingale un jeu favorable.

Remarque 12. Si X est une martingale, alors par récurrence on a que $\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n] = X_n$ pour tout $m \geqslant n \geqslant 0$. Une propriété analogue est valable pour les sous/sur-martingales. Si on note $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ alors la propriété de (sous-/sur-)martingale est équivalente à

$$\mathbb{E}[\Delta X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0 \,(\text{ou} \geqslant, \text{ou} \leqslant)\, \text{pour tout}\, n \geqslant 0.$$

Exemple 13. Soit Z une v.a. réelle et intégrable. Alors $X_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$ est une martingale. Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un processus réel adapté et croissant (resp. décroissant) (c-à-d tel que $A_n \leqslant$ (resp. $\geqslant$)A_{n+1} p.s.) alors il est aussi une sous-(resp. sur-) martingale.

Exemple 14. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On pose $Y_0 = 0$ et $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geqslant 1$. Alors $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geqslant 0}$ et donc aussi par rapport à $(\mathcal{F}_n^Y)_{n\geqslant 0}$.

Proposition 15. *(*DÉCOMPOSITION DE DOOB*) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite adaptée et intégrable, alors il existe un unique martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ et un unique processus $(I_n)_{n\geqslant 0}$ prévisible, intégrable et tel que $I_0 = 0$ tels que on ait*

$$X_n = X_0 + M_n + I_n, \qquad n \geqslant 0.$$

De plus

a) $I_n = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *ssi* $(X_n)_{n \geqslant 0}$ *est une martingale ;*

b) $(I_n)_{n \geqslant 0}$ *est croissant ssi* $(X_n)_{n \geqslant 0}$ *est une sous-martingale ;*

c) $(I_n)_{n \geqslant 0}$ *est décroissant ssi* $(X_n)_{n \geqslant 0}$ *est une sur-martingale .*

Démonstration. On démontre d'abord l'unicité de la décomposition : si $\tilde{M}$, $\tilde{I}$ sont une autre décomposition possible de X en partie martingale et processus prévisible intégrable, alors on doit avoir

$$\tilde{M}_n + \tilde{I}_n = M_n + I_n = X_n - X_0$$

et donc si on pose $N_n = \tilde{M}_n - M_n = I_n - \tilde{I}_n$ on a que N_n est une martingale et aussi un processus prévisible intégrable, donc pour tout $n \geqslant 0$

$$N_n = \mathbb{E}[N_{n+1} | \mathcal{F}_n] = N_{n+1}$$

car $N_{n+1} \hat{\in} \mathcal{F}_n$ ce qu'implique que N_n est constant en n et donc que $N_n = N_0 = 0$ car $I_0 = \tilde{I}_0 = 0$. Donc $I_n = \tilde{I}_n$ et $M_n = \tilde{M}_n$. Pour l'existence on remarque que $\Delta M_n = \Delta X_n - \Delta I_n$ et en prenant l'espérance conditionnelle on obtient que

$$0 = \mathbb{E}[\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\Delta X_{n+1} | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\Delta I_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\Delta X_{n+1} | \mathcal{F}_n] - \Delta I_{n+1}$$

car par la prévisibilité de I_n on a $\Delta I_{n+1} \hat{\in} \mathcal{F}_n$. Donc on peut poser

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\Delta X_{i+1} | \mathcal{F}_i], \qquad I_0 = 0$$

ce qui nous donne un processus prévisible et intégrable. Il est aussi évident que si on pose $M_n = X_n - X_0 - I_n$ alors $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale.

La formule pour I_n donne directement que si $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est martingale alors $I_n = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, l'implication opposée est évidente. Si $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une (sur-)sous-martingale alors pour tout n: $\mathbb{E}[\Delta X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geqslant X_n$ (ou $\leqslant$) et donc le processus I_n est (de-)croissant. □

Proposition 16. *Soit* $(X_n)_{n \geqslant 0}$ *une (sous-)martingale et* Φ *une fonction convexe (convexe et croissante) telle que* $\mathbb{E}[|\Phi(X_n)|] < +\infty$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *alors* $(\Phi(X_n))_{n \geqslant 0}$ *est une sous-martingale.*

Démonstration. Par l'inégalité de Jensen on a que

$$\mathbb{E}[\Phi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \geqslant \Phi(\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]) = \Phi(X_n)$$

ou la dernière égalité est due à la propriété de martingale de X. Si X est sous-martingale,

$$\mathbb{E}[\Phi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \geqslant \Phi(\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \geqslant \Phi(X_n)$$

car Φ est croissante. □

Proposition 17. *Soit* $(X_n)_{n \geqslant 0}$ *une martingale de carre intégrable (c-à-d* $\mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ *pour tout* $n \geqslant 0$*). Alors la sous-martingale* $(X_n^2)_{n \geqslant 0}$ *admet la décomposition*

$$X_n^2 = X_0^2 + N_n + [X]_n$$

avec

$$N_n = 2 \sum_{i=1}^{n} X_{i-1} \Delta X_i, \qquad [X]_n = \sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2$$

où le processus $(N_n)_{n \geqslant 0}$ *est un martingale et le processus* $([X]_n)_{n \geqslant 0}$ *est un processus croissant appelé variation quadratique de* X.

Démonstration. (exercice) □

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale. Déterminer la décomposition de Doob de $(X_n^2)_{n\geqslant 0}$:

$$X_n^2 = X_0^2 + M_n + \langle X\rangle_n$$

avec $(M_n)_{n\geqslant 0}$ martingale et $(\langle X\rangle_n)_{n\geqslant 0}$ processus prévisible (et croissante). Montrer que

$$\Delta\langle X\rangle_n = \mathbb{E}[(\Delta X_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\Delta[X]_n\,|\mathcal{F}_{n-1}].$$

3 Stratégies

Définition 18. *(TRANSFORMATION DE MARTINGALE) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté et $(C_n)_{n\geqslant 1}$ un processus prévisible. On définit le nouveau processus $((C\cdot X)_n)_{n\geqslant 0}$ par $(C\cdot X)_0 = 0$ et $\Delta(C\cdot X)_n = C_n\Delta X_n$ pour tout $n\geqslant 1$. Alors*

$$(C\cdot X)_n = \sum_{i=1}^n C_i(X_i - X_{i-1}).$$

Lemme 19. *Soit $(C_n)_{n\geqslant 1}$ un processus prévisible borné (c-à-d $|C_n|\leqslant K$ pour tout $n\geqslant 1$).*

i. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale alors $((C\cdot X)_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

ii. Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une (sous-)sur-martingale et $C_n\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 1$ alors $((C\cdot X)_n)_{n\geqslant 0}$ est une (sous-)sur-martingale.

Ces propriétés sont aussi valables sans condition de bornitude si $C_n\in L^2$ pour tout $n\geqslant 1$ et $X_n\in L^2$ pour tout $n\geqslant 0$.

Démonstration. L'integrabilité et l'adaptation de $((C\cdot X)_n)_{n\geqslant 0}$ sont laisses en exercice. On a pour tout $n\geqslant 1$,

$$\mathbb{E}[\Delta(C\cdot X)_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[C_n\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = C_n\mathbb{E}[\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}]$$

par la prévisibilité de $(C_n)_{n\geqslant 1}$, ce que nous permet de conclure. □

Il est facile de montrer que si on pose

$$C_n = 1_{n\leqslant T}$$

alors le processus $(C_n)_{n\geqslant 1}$ est prévisible et $X_0 + (C\cdot X)_n = X_n^T = X_{T\wedge n}$ donc on peut conclure que

Théorème 20. *Si T est un temps d'arrêt et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une (sur-)martingale, alors $(X_n^T)_{n\geqslant 0}$ est une (sur-)martingale et en particulier*

$$\mathbb{E}[X_{n\wedge T}] \leqslant \mathbb{E}[X_0]$$

dans le cas des sur-martingales (avec égalité pour les martingales).

Remarque 21. La bornitude de T n'est pas requise.

Remarque 22. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ avec $X_0 = 0$, alors $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale et pour tout t.a. T on a que

$$\mathbb{E}[X_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[X_0] = 0$$

Mais en général

$$\mathbb{E}[X_T] \neq 0$$

en effet si $T = \inf\{n > 0: X_n = 1\}$ alors par récurrence on a que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ et $X_T = 1$ donc $\mathbb{E}[X_T] = 1$. Donc la convergence L^1 de $X_{T\wedge n}$ vers X_T n'a pas toujours lieu.

Voici une importante généralisation de l'identité de Wald pour les (sur-)martingales.

Théorème 23. *(*THÉORÈME D'ARRÊT OPTIONNEL DE DOOB*) Soit T un t.a. et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une sur-martingale, alors X_T est intégrable et $\mathbb{E}[X_T]\leqslant\mathbb{E}[X_0]$ dans les cas suivantes :*

i. T est borné

ii. X est borné et $T<+\infty$ p.s.

iii. $\mathbb{E}[T]<+\infty$ et existe $K>0$ tel que pour tout tout $n\geqslant 1$

$$|X_n - X_{n-1}|\leqslant K\,.$$

iv. $X_n\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 0$ et $T<+\infty$ p.s.

Démonstration. On sait que pour tout $n\geqslant 1$

$$\mathbb{E}[X_{n\wedge T} - X_0]\leqslant 0.$$

(i) Si $T\leqslant N$ il suffit de prendre $n=N$. (ii) On peut utiliser la convergence dominée pour montrer que

$$0\geqslant \lim_n \mathbb{E}[X_{n\wedge T}-X_0] = \mathbb{E}[\lim_n (X_{n\wedge T}-X_0)] = \mathbb{E}[X_T - X_0].$$

(iii) On a que

$$|X_{n\wedge T}-X_0|\leqslant \sum_{k=1}^{T\wedge n} |\Delta X_k|\leqslant KT$$

car $|\Delta X_k|\leqslant K$ pour tout $k\geqslant 0$. Comme $\mathbb{E}[T]<+\infty$ on en déduit par convergence dominée que $\mathbb{E}[X_T]\leqslant\mathbb{E}[X_0]$. (iv) La suite $(X_{n\wedge T})_{n\geqslant 0}$ est positive et converge p.s. à X_T donc par le lemme de Fatou on a que

$$\mathbb{E}[X_0]\geqslant \liminf_n \mathbb{E}[X_{n\wedge T}]\geqslant \mathbb{E}[\liminf_n X_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[X_T].$$

□