TD1. Intégrales doubles et couples de variables aléatoires.

Exercice 1. Calculer les intégrales $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

a) $f(x,y)=1/(x+y+1)^2$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$.

b) $f(x,y)=\sin(x+y)$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x\leq \pi/2, 0\leq y\leq \pi/2\}$.

c) $f(x,y)=x^2+y^2$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq x\}$.

d) $f(x,y)=\exp(-y)/(2\sqrt{x})$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x>0, y>0, x\leq y^2\}$.

e) $f(x,y)=1/\sqrt{x^2+y^2+1}$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}$ (Utiliser le passage en coordonnées polaires) .

f) $f(x,y)=(x+y)^2\exp(x^2-y^2)$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$ (Utiliser le changement de variable $u=x+y$ et $v=x-y$) .

g) $f(x,y)=y\exp(-x\,y)$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. On demande ici de calculer l'intégrale de deux façons différentes (intégrer d'abord en x puis en y; faire ensuite le contraire).

Exercice 2. Calculer les intégrales $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

a) $f(x,y)=\log(1+x+y)$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\}$.

b) $f(x,y)=e^{x^2}$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x\leq 3, 0\leq y\leq x/3\}$.

c) $f(x,y)=x\,y$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\leqslant y\leqslant 2-x^2\}$.

d) $f(x,y)=x^2y$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$.

Exercice 3. Soit

$$f(x,y)=\begin{cases} k(y^2-x^2+1) & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Pour quelle valeur de k, f peut-elle représenter la densité d'un couple de variables aléatoires ?

Exercice 4. Soit $V=(X,Y)$ un couple de variables aléatoires admettant pour densité

$$f_V(x,y)=\begin{cases} k & \text{si} \quad |x|+|y|\leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

a) Déterminer k ainsi que les lois marginales de X et de Y.

b) Déterminer $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et Y.

Exercice 5. Déterminer k pour que les fonctions suivantes soient des densités:

a) $f(x,y)=k/(x+y)^3\,\mathbb{I}_D(x,y)$ avec $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|x\geqslant 1, y\geqslant 1, x+y\leqslant 3\}$

b) $f(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbb{I}_D(x, y)$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}$

c) $f(x, y) = k\,\mathbb{I}_D(x, y)$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x/a \leqslant y \leqslant a\,x, 1/(a\,x) \leqslant y \leqslant a/x, x > 0\}$ étant a un paramètre tel que $a > 1$.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi continue uniforme sur $[0, 1]$.

a) Calculer la densité de probabilité de $T = \inf(X, Y)$ et de $Z = \sup(X, Y)$.

b) Calculer l'espérance mathématique de Z et de T.

c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{Z,T}$ entre Z et T.

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant pour densité de probabilité $f_{(X,Y)}(x, y) = \exp(-y)\mathbb{I}_{[x,+\infty[}(y)\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

a) Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité de probabilité.

b) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

c) Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 1 | Y > 2)$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire admettant pour loi conditionnelle lorsque $Y = y$, la loi de densité : $y^2 x \exp(-y\,x)1_{\mathbb{R}_+}(x)$. La variable aléatoire Y admet pour densité $f_Y(y) = 1/y^2 1_{]1,+\infty[}(y)$. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$ ainsi que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$.

Exercice 9. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. On considère les variables U et V définies par $U = X + Y$ et $V = X/Y$.

a) Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (U, V). Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

b) Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(V)$.