TD2. Vecteurs aléatoires, vecteurs Gaussiens et loi Gamma et Khi-deux.

Exercice 1. Soit $(X,\ Y)$ un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ admettant une densité $f_{(X,Y)}(x,y) = C\mathbb{I}_{x^2+y^2\leqslant 1}$

a) Déterminer C et montrer que X, Y ne sont pas indépendantes.

b) Calculer $\mathbb{P}(X+Y\leq 0)$ et $\mathbb{P}(X\geq 0, Y\geq 0)$ et $\mathrm{Var}(X|Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])^2|Y]$.

c) Soient (R,Θ) tels que $R\geq 0$, $\Theta\in[0,2\pi)$ et $X = R\sin(\Theta)$, $Y = R\cos(\Theta)$. Montrer que R, Θ sont indépendantes et calculer leurs lois marginales.

Exercice 2. Soient $(X,\ Y)$ un couple de variables aléatoires indépendantes et de même loi de carré intégrable.

a) Montrer que $\mathbb{E}[X|X+Y] = \frac{X+Y}{2}$.

b) Montrer que les v.a. $S = X+Y$ et $D = X-Y$ satisfont $\mathrm{Cov}(S,D) = 0$.

Exercice 3. Soit (X,Y,Z) un vecteur aléatoire à densité tel que $\mathbb{E}[|Z|] < +\infty$. Montrer que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Z|X,Y]|Y] = \mathbb{E}[Z|Y].$$

Exercice 4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires tel que la loi marginale de X est une loi uniforme sur $[0,1]$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est une loi $\mathcal{N}(x,x^2)$.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

b) Montrer que X et Y/X sont indépendantes.

Exercice 5. Soient X, Z deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1,\ 1]$. On pose $Y = \mathbb{I}_{X+Z\geqslant 0}$.

a) Déterminer la fonction de régression $g(x) = \mathbb{E}[Y|X=x]$ de Y sur X.

b) Calculer le coefficient de corrélation ρ_{XY}.

c) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X et de X sachant Y.

Exercice 6. Soient X, Y, Z des v.a.s telles que X, Y sont de carré intégrable. On définit la covariance conditionnelle entre X, Y sachant Z par

$$\mathrm{Cov}(X,Y|Z) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Z])(Y-\mathbb{E}[Y|Z])|Z].$$

Montrer que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(X,Y|Z)] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X|Z],\mathbb{E}[Y|Z]).$$

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2,\beta)$. On pose $S = X+Y$ et $T = X/(X+Y)$.

a) Montrer que S et T sont des variables indépendantes et préciser leurs lois respectives.

b) Déterminer la loi de X/Y et calculer son espérance si elle existe.

Exercice 8. Montrer que la loi exponentielle de paramètre λ est un cas particulier de la loi Gamma. Considérons maintenant X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exercice 9. Soit U_1, ..., U_n n variables indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $I_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$ et $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$.

Exercice 10. Soit $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où ρ est un réel.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel ρ pour que Σ soit la matrice de variance-covariance d'un vecteur gaussien.

b) On suppose de plus que ce vecteur gaussien est centré. Donner l'expression analytique de sa densité de probabilité.

Exercice 11. Soit (X, Y) un vecteur gaussien de moyenne $(1, -1)$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y, $\mathbb{P}(X < 0)$ et $\mathbb{P}(X - Y < 0)$.

b) Déterminer la valeur de α telle que $\mathbb{P}(|X + Y| \leq \alpha) \geq 0.9$.

Exercice 12. Soit (X, Y) deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X/Y$. Montrer que U suit une loi de Cauchy, i.e. une loi dont la densité de probabilité est de la forme $f(u) = \frac{1}{\pi(u^2 + 1)}$.