TD3. Vecteurs Gaussiens.

Exercice 1. Soit (X, Y) un vecteur gaussien. Montrer que $X + Y$ est une variable aléatoire gaussienne dont on précisera les paramètres en fonction des caractéristique du vecteur aléatoire (X, Y).

a) Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ où μ est une vecteur de $\mathbb{R}^2$ et Σ une matrice carrée d'ordre 2 symétrique définie positive. Soit A une matrice carrée d'ordre 2 inversible. on pose $Y = A\ X$. Montrer que Y est une vecteur gaussien dont on donnera la moyenne et la matrice de variance-covariance.

b) On suppose maintenant que X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = \begin{cases} X & \text{si} \quad |X| \geq a \\ -X & \text{si} \quad |X| < a \end{cases}$.
Montrer Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X + Y$ n'est pas gausienne. En déduire que le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.

c) Soit U une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et E une variable aléatoire indépendante de U de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On pose $V = a\,U + E$ où a est un réel fixé. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(U|V)$.

Exercice 2.

a) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = X^2$. Déterminer la densité de probabilité de U et l'identifier comme la densité d'une loi Gamma dont on précisera les paramètres. En déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

b) Soit X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Donner sa densité de probabilité, son espérance et sa variance. Cette loi porte le nom de loi de chi-deux à n degrés de libertés. On la note $\chi^2(n)$.

c) Soient V et W deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\chi^2(n)$ et $\chi^2(m)$. Déterminer la loi de $V + W$.

Exercice 3. Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, et K une v.a. discrète telle que $\mathbb{P}(K = -1) = \mathbb{P}(K = 1) = 1/2$ et K est indépendante de X. On considère $Y = K X$.

a) Calculer $\mathbb{E}(Y), \mathrm{Var}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

b) Calculer la fonction de répartition de Y et en déduire que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

c) Montrer (par un argument simple) que le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.

Exercice 4. Soit (X, Y) le vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $Z = Y - \alpha X$.

a) Déterminer α tel que X et Z soient indépendantes.

b) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y et après entre X^2 et Y^2.

Exercice 5. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ tel que $X \sim \mathcal{N}(1, 1)$ et la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est $\mathcal{N}(3x, 4)$.

a) Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien.

b) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est gaussienne.

Exercice 6. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien dans $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de covariance l'identité I_2. Soit (Z, Q) le vecteur aléatoire défini par $Z = (X+Y)/2$ et $Q = (X-Y)/2$. On pose $U = \frac{1}{2}(X-Z)^2 + \frac{1}{2}(Y-Z)^2$

a) Calculer la fonction caractéristique du vecteur (Z, Q) et montrer qu'il est un vecteur gaussien et que Z, Q sont indépendantes.

b) Montrer que Z et U sont indépendantes et donner la loi de U.

Exercice 7. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ un n-plet de v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite de v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ définie par

$$X_i = a\, X_{i-1} + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

où $X_0 = 0$.

a) Déterminer la loi des v.a. X_i pour $i = 1, \ldots, n$.

b) Déterminer la covariance entre X_i et X_{i+1}.

c) Le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est-il un vecteur Gaussien?