TD4. Convergence des variables aléatoires.

Exercice 1. Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $U = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right|$ et $V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|$. Comparer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(V)$ et les calculer.

Exercice 2. Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p/n. Quid de la convergence en loi de X_n/n ?

Exercice 3. Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de v.a.s telles que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $\frac{X_n - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des v.a. telles que X_n est une Binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ avec $\lambda > 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la Poisson de paramètre λ. Estimer la probabilité que $X_n \leq 2$ si $\lambda = 2$ et $n = 10000$.

Exercice 5. On définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = \dfrac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire X_n. Que peut-on dire de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$?

b) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Exercice 6. Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{P}(1)$. Quelle la loi de $X_1 + ... + X_n$? Que vaut $\mathbb{P}(X_1 + ... + X_n \leq n)$? Utiliser le théorème central limite pour montrer que la limite de $\exp(-n)\sum_{k=0}^{n} n^k/k!$ lorsque $n \to \infty$ est égale à 1/2.

Exercice 7. Une suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers une variable aléatoire X, et une autre suite Y_n indépendante des X_n converge en probabilité vers la variable certaine égale à $a \in \mathbb{R}$.

a) On pose, pour tout entier n, $Z_n = X_n + Y_n$. Quelle est la limite en loi de la suite Z_n ?

b) Soit Y_n une variable aléatoire dont la loi est définie par $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 1/n$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/n$. Montrer que la suite Y_n converge en probabilité vers 0. Construire une suite de variables aléatoires Z_n possédant un moment d'ordre 2 et qui converge en loi vers la variable aléatoire Z normale centrée réduite, sans que la variance de Z_n tende vers 1.

Exercice 8. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère la suite de $U_n = U1_{[1/n,1]}(U)$. Montrer que $(U_n)_n$ converge presque sûrement vers U lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite iid Bernoulli de paramètre $p \in \,]0, 1[$. Pour tout $n \geq 1$ on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

a) Déterminer la loi de Y_n et calculer $\mathbb{E}[Y_n]$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$.

b) Soit $T_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$. Calculer $\mathbb{E}[T_n]$ et $\mathrm{Var}(T_n)$.

c) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la v.a. constante $2p$.

Exercice 10. Une compagnie d'assurance assure 500 navires pour une somme de 6 millions chacun. Chaque navire a chaque année une probabilité égale à 0.001 de subir un sinistre majeur couvert par l'assurance. Soit X le nombre de navires perdus en une année. Donner la loi de X, son espérance et sa variance. Auxquelles réserves doit posséder la compagnie d'assurance pour être sûre de pouvoir payer les indemnités avec une probabilité égale à 0.999 à la fin de chaque année?

Une seconde compagnie d'assurance assure également 500 navires dans les mêmes conditions que la précédente. Les compagnies ont-elles intérêt à fusionner?