Université Paris - Dauphine

Processus Aléatoires Discrets

Contrôle Continu du 22-11-2007

Durée 1h30.

Aucun document n'est autorisé. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. On répartit $2N$ boules, N noires et N blanches, dans 2 urnes à raison de N boules par urne. Puis à chaque instant on choisit un boule au hasard dans chacune des urnes et on les échange. On désigne par X_n le nombre de boules noires dans l'urne 1 après n échanges.
   (a) Préciser l'espace d'états M de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer sa matrice de transition P.
   (b) Montrer que cette chaîne est irréductible. Est-elle fortement irréductible (c'est-à-dire : existe-t-il un entier n_0 tel que $P^{n_0}(i,j) > 0$ pour tout $i, j \in M$) ?
   (c) On rappelle que $\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} = \frac{N!}{k!(N-k)!}, \forall k \leq N, k, N \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité définie par $\pi(k) = c\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix}^2$, $\forall k \in M$ (où c est une constante que l'on précisera) est une probabilité stationnaire réversible. Y-a-t-'il d'autres probabilités stationnaires pour cette chaîne ? Si oui, donner des exemples.
   (d) Que peut-on dire sur le comportement de
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k=i},$$
   pour tout $i \in M$, quand $n \to \infty$?
2. On considère la fonction suivante
   $$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}1_{0<x<y}.$$
   (a) Vérifier que $f_{X,Y}$ définit une densité de probabilité sur R^2.
   (b) Calculer les densités marginales f_X et f_Y de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer $E(Y|X)$ et $E(X|Y)$.