Partiel

[Durée une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independandes. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soient T, S des temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

a) Montrer que $U = \min(T, S)$ est un temps d'arrêt .

b) Montrer que si $S(\omega) \leqslant T(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ alors $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $g(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X_1}] < +\infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration naturelle de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ (c-à-d $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ pour $n \geqslant 1$) et soit $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la marche aléatoire engendrée par les $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

a) Montrer que pour tout t.a. T borné associé à la filtration naturelle on a que

$$\mathbb{E}[e^{\lambda S_T} g(\lambda)^{-T}] = 1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $a < 0 < b$ et $T = \inf\{n > 0: S_n \notin (a, b)\}$. Utiliser le résultat de la question a) pour montrer que si $\hat{\theta}$ est tel que $g(\hat{\theta}) = 1$ alors $\mathbb{P}(S_T \leqslant a) \leqslant e^{\hat{\theta} a}$.

c) Soit $X_k = 1$ avec probabilité p et $X_k = -1$ avec probabilité $q = 1 - p$ et $p > 1/2$. Soit $T = \inf\{n > 0: S_n = 1\}$. On suppose que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$. Montrer que

$$1 = e^{\theta} \mathbb{E}[g(\theta)^{-T}]$$

pour tout $\theta > 0$ et utiliser cet équation pour obtenir la fonction génératrice de T $\varphi(s) = \mathbb{E}[s^T]$ pour $|s| < 1$.

Exercice 3. Une chaîne de Markov contrôlée $(X_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ évolue selon la récurrence aléatoire contrôlée

$$X_{n+1} = \lambda X_n + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

où $U_n = u_n(X_k, ..., X_n)$, u un contrôle à valeurs dans $\mathbb{R}$ et où $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite des v.a. iid de moyenne nulle et variance $\sigma^2 > 0$. On se fixe un horizon fini $T > 0$ et une constante $\beta \in]0, 1[$. On veut trouver un contrôle u qui minimise le coût moyen (actualisé)

$$W_T^u(t, x) = \mathbb{E}_{(t,x)}^u[\sum_{k=t}^{T-1} \beta^{k-t} C(X_k, U_k) + \beta^{T-t} R(X_T)]$$

où $C(x, u) = \left(u^2 + a\, x^2\right)/2$ et $R(x) = a_0 x^2/2 + b_0$ avec a, a_0, b_0 constantes fixées.

a) Montrer que la fonction $W_T(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{C}_t} W_T^u(t, x)$ satisfait l'équation

$$W_T(t, x) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \{c(x, u) + \beta \mathbb{E}[W_T(t + 1, \lambda x + u + \varepsilon_1)]\}.$$

b) Montrer par récurrence rétrograde que $W_T(t)$ est de la forme $W_T(t) = \frac{1}{2} a_{T-t} x^2 + b_{T-t}$ avec $(a_j)_{j\geqslant 0}$ et $(b_j)_{j\geqslant 0}$ des constantes à déterminer.

c) Montrer que le contrôle optimal u^* est Markovien et tel que $u_t^*(x) = k_{T-t}\, x$ pour une certaine suite $(k_j)_{j\geqslant 0}$ de constantes.

d) Calculer les constantes a_j, b_j, k_j pour $j \geqslant 0$.