[M. Gubinelli - Contrôle des chaînes de Markov - M1 MMD 2011/2012 - 20110926 - poly 2 - v.1]

Arrêt optimal

1 Rappels sur les processus et sur les temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 1}$ une filtration (c-à-d une famille croissante des sous-tribus de $\mathcal{A}$). La filtration détermine ce qu'on sait et ce qu'on n sait pas à un instant de temps donné: tout événement $A \in \mathcal{F}_n$ est déterminé au temps n. Un processus $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est dit adapté ssi $X_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est prévisible si X_1 est constante et $X_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ pour tout $n > 1$. Il est intégrable si $X_n \in L^1(\Omega)$ pour tout n. Il est une martingale (sur/sous) si il est intégrable et $X_n = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ ($\geqslant$,$\leqslant$) pour tout $n \geqslant 1$.

L'espérance conditionnelle d'une v.a. F intégrable par rapport à une tribu $\mathcal{G}$ est une v.a. intégrable $\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]$ telle que $\mathbb{E}[GF] = \mathbb{E}[G\mathbb{E}[F|\mathcal{G}]]$ pour tout v.a. bornée F qui est $\mathcal{G}$–mesurable.

Un temps d'arrêt T est une v.a. $T: \Omega \to \mathbb{N}$ telle que les événements $\{T = k\}$ sont $\mathcal{F}_k$–mesurables pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette condition équivaut à demander que $\{T \leqslant k\} \in \mathcal{F}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quelques propriétés des temps d'arrêt: $\{T > k\} \in \mathcal{F}_k$, $\{T \geqslant k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$, si T, S sont t.a. alors $T \wedge S = \min(T, S)$ et $T \wedge S = \max(T, S)$ sont t.a. ($(T \wedge S)(\omega) = \min(T(\omega), S(\omega))$).

La tribu $\mathcal{F}_T$ engendrée par le temps d'arrêt T est la plus petite tribu qui contient les événements $A \in \mathcal{A}$ tels que $\{T \leqslant k\} \cap A \in \mathcal{F}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, i.e.

$$\mathcal{F}_T = \sigma(A \in \mathcal{A}: \{T \leqslant k\} \cap A: k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{F}_k)$$

Une fonction G est $\mathcal{F}_T$–mesurable ssi $G\mathbb{I}_{\{T=k\}}$ est $\mathcal{F}_k$–mesurable pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est une caractérisation équivalente des fonctions $\mathcal{F}_T$–mesurables. Pour le prouver on note que il est vrai pour les fonction caractéristiques $G = \mathbb{I}_B$ où $B \in \mathcal{F}_T$ et que on peut approcher n'importe quelle fonction $\mathcal{F}_T$ mesurable par des combinaison linéaires des fonctions caractéristiques. Si on note $G_k = G\mathbb{I}_{\{T=k\}}$ alors on a que $(G_k)_{k\geqslant 1}$ est un processus adapté et que $G = G_T$. Donc toute fonction $G \in \mathcal{F}_T$ peut être écrite comme la valeur au temps T d'un processus adapté $(G_k)_{k\geqslant 1}$.

Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est un processus adapté alors le processus arrêté en T: $\tilde{X}_n = X_{n\wedge T}$ est adapté et X_T est $\mathcal{F}_T$–mesurable. Si $(M_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale alors $(\tilde{M}_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale. Si S, T sont deux t.a. alors on dit que $S \leqslant T$ si $S(\omega) \leqslant T(\omega)$ presque sûrement.

Si S, T sont deux t.a. tels que $S \leqslant T$ alors $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$. Preuve: La tribu $\mathcal{F}_S$ est engendrée par les événements $A \in \mathcal{A}$ tels que $\{S \leqslant k\} \cap A \in \mathcal{F}_k$. Mais alors si $A \in \mathcal{F}_S$ on a que $\{T \leqslant k\} \cap A = \{S \leqslant T \leqslant k\} \cap A = \{T \leqslant k\} \cap (\{S \leqslant k\} \cap A) \in \mathcal{F}_k$ car $\{T \leqslant k\} \in \mathcal{F}_k$ et $\{S \leqslant k\} \cap A \in \mathcal{F}_k$ par hypothèse. Donc tous les générateurs A de $\mathcal{F}_S$ sont aussi générateurs de $\mathcal{F}_T$ et donc $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Lemme 1. *Si les t.a. sont bornées et $(M_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale, alors*

$$\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S] = M_S. \tag{1}$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $S \leqslant T \leqslant N$ par l'hypothèse de borninude des t.a. On montre d'abord que $\mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_T] = M_T$. Par la définition d'espérance conditionnelle on doit montrer que $\mathbb{E}[M_N\, G] = \mathbb{E}[M_T\, G]$ pour toute fonction bornée G qui est $\mathcal{F}_T$–mesurable. On a que $G\mathbb{I}_{\{T=n\}} \in \mathcal{F}_n$ et que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_N G] &= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[M_N G\mathbb{I}_{\{T=n\}}] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_n]\, G\mathbb{I}_{\{T=n\}}]\\ &= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[M_n\, G\mathbb{I}_{\{T=n\}}] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[M_T G\mathbb{I}_{\{T=n\}}] = \mathbb{E}[M_T G].\end{aligned}$$

Maintenant on a que $\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[M_N|\mathcal{F}_S] = M_S$ car $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$. □

Remarque 2. Une propriétés analogues sont vraie pour les sous/sur–martingales. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une sous-martingale, alors il existe toujours une martingale $(M_n)_{n\geqslant 1}$ et un processus prévisible croissante $(A_n)_{n\geqslant 1}$ (i.e. $A_n\in\mathcal{F}_{n-1}$ et $A_{n+1}\geqslant A_n$) tels que $X_n=M_n+A_n$. En effet si M doit être une martingale on a que

$$X_n-A_n=M_n=\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[X_{n+1}-A_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]-A_{n+1}$$

et donc il suffit définir A par $A_1=0$ et $A_{n+1}-A_n=\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]-X_n\geqslant 0$ pour tout $n>1$. Alors si X est une sous-martingales avec décomposition $X_n=M_n+A_n$ on a que

$$\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]=\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S]+\mathbb{E}[A_T|\mathcal{F}_S]=M_S+\mathbb{E}[A_T|\mathcal{F}_S]\geqslant M_S+\mathbb{E}[A_S|\mathcal{F}_S]=M_S+A_S=X_S$$

car $A_T\geqslant A_S$ par la croissance de $(A_n)_{n\geqslant 1}$ et le fait que $T\geqslant S$.

Remarque 3. Si F est une v.a. intégrable alors $F_n=\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n]$ est une martingale. Donc le lemme précèdent donne que $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_S]=F_S$ pour tout t.a. bornée S. Donc on peut calculer l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{F}_S$ en prenant la valeur au temps $n=S$ de l'espérance conditionnelle calculé par rapport à $\mathcal{F}_n$.

2 Arrêt optimal en horizon fini

On considère un processus adapté $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ et on se pose le problème d'optimiser la valeur $\mathbb{E}[Y_T]$ parmi tous les temps d'arrêt T (pour la filtration $\mathcal{F}$). L'interprétation est que $Y_n(\omega)$ est le gain qu'on obtient si on décide de s'arrêter au temps n et qu'on cherche à optimiser le gain moyen attendu en fonction de la règle d'arrêt que on se donne (que est la seule chose raisonnable au temps initial, i.e. sans connaître au préalable l'évolution du système). On retient seulement les règles d'arrêt $T\colon\Omega\to\mathbb{R}$ qui sont telles que $\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$, c-à-d pour lesquelles on sait dire si il faut s'arrêter au temps n seulement en fonction de l'histoire observée jusqu'à ce moment-là.

On considère d'abord le problème en horizon fini, i.e. on se donne $N\in\mathbb{N}$ fixé, on appelle $\mathcal{T}_N$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés par N et on optimise parmi tous les t.a. $T\in\mathcal{T}_N$. Soit $J_N=\sup_{T\in\mathcal{T}_N}\mathbb{E}[Y_T]$ le gain moyen optimal. On appelle $T^\star\leqslant N$ temps d'arrêt optimal si $\mathbb{E}[Y_{T^\star}]=J_N$.

Notation: L'infimum tronqué $\inf_N A$ pour un ensemble $A\subseteq\mathbb{R}$ est donné par $\inf_N A=\inf A$ si $A\neq\emptyset$ et $\inf_N\emptyset=N$.

La solution du problème d'arrêt optimal (comme de la plus part des problèmes d'optimisation) passe par la détermination d'une *fonction valeur* Z_n associé aux différent choix qui sont encore disponibles au temps n. La fonction valeur représente le gain sur lequel on peut espérer en fonction de tous l'information que j'ai accumulé jusqu'au temps n, i.e. de $\mathcal{F}_n$. Elle doit satisfaire les propriétés suivantes:

- $Z_n\in\mathcal{F}_n$: elle est un processus adapté. On doit être capable de la déterminer seulement en fonction des informations disponibles au temps n.
- $Z_n\geqslant Y_n$: au temps n ce que j'espère gagner ne peut pas être inférieur à ce que je peux gagner en m'arrêtant tout de suite à n.
- $Z_n\geqslant\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$: ma position a une valeur qui n'est pas inférieure à ce que j'espère gagner en moyenne à l'étape suivante (étant donné que je connais déjà $\mathcal{F}_n$) .

En effet à chaque étape j'ai deux choix (m'arrêter ou continuer) sauf au temps final N où je dois forcement m'arrêter et donc gagner Y_N. On défini donc la fonction valeur par

$$Z_N=Y_N,\qquad Z_n=\sup\left(Y_n,\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]\right)\quad\text{pour } 1\leqslant n<N \tag{2}$$

Elle est une sur-martingale qui majore Y. En effet on va montrer qu'elle est l'*enveloppe de Snell* de Y, i.e. la plus petite sur-martingale Q tel que $Q_n\geqslant Y_n$ pour tout $0\leqslant n\leqslant N$.

Théorème 4. *Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ un processus adapté tel que $\mathbb{E}|Y_n|<\infty$pour tout $n\geqslant 1$. On défini Z_n par l'eq. (2) et un t.a. $T^\star=\inf\{k\leqslant N\colon Y_k=Z_k\}$. Alors la suite $(Z_{n\wedge T^\star})_{n\geqslant 1}$ est une martingale et*

$$\mathbb{E}[Z_1]=\mathbb{E}[Z_{T^\star}]=\mathbb{E}[Y_{T^\star}]=J_N.$$

Le t.a. $T^\star$ est optimal et Z est l'enveloppe de Snell de Y.

Remarque 5. On utilisera souvent des écritures du genre $T^\star = \inf\{k \leqslant N: Y_k = Z_k\}$ pour définir des temps d'arrêt. Ils sont abrégées pour $T^\star(\omega) = \inf\{k \leqslant N: Y_k(\omega) = Z_k(\omega)\}$. Exercice: montrer que il s'agit bien d'un temps d'arrêt.

Démonstration. Par définition $Z_n \geqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ et $Z_n \geqslant Y_n$. Sur l'événement $\{T^\star \geqslant n\}$ on a $Z_n = \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ donc le processus $\tilde{Z}_n := Z_{n\wedge T^\star}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. En effet $\mathbb{E}[1_A Z_{(n+1)\wedge T^\star}] = \mathbb{E}[1_A Z_{n\wedge T^\star}]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_n$. Donc si on considère les deux temps d'arrêt $n \wedge T^\star$ et $T^\star$ on a $n \wedge T^\star \leqslant T^\star$ et $\mathbb{E}[\tilde{Z}_{T^\star}|\mathcal{F}_{n\wedge T^\star}] = \tilde{Z}_{n\wedge T^\star}$ qui équivaut à dire $\mathbb{E}[Z_{T^\star}|\mathcal{F}_{n\wedge T^\star}] = Z_{n\wedge T^\star}$. En prenant l'espérance on a, pour tout t.a. $T \leqslant N$:

$$\mathbb{E}[Y_T] \leqslant_{(1)} \mathbb{E}[Z_T] \leqslant_{(2)} \mathbb{E}[Z_1] =_{(3)} \mathbb{E}[Z_{T^\star}] =_{(4)} \mathbb{E}[Y_{T^\star}]$$

où l'inégalité (1) est donne par la propriété que $Y_n \leqslant Z_n$ pour tout n et donc pour tout t.a. $T \leqslant N$, l'inégalité (2) est la propriété de sur-martingale de Z_n par rapport au t.a. T, l'égalité (3) est donne par la propriété de martingale du processus arrêté $\tilde{Z}_n$ et enfin l'égalité (4) est du au fait que $Y_{T^\star} = Z_{T^\star}$ par définition de $T^\star$. Cela étant vrai pour n'importe quelle t.a. $T \leqslant N$ on a que $\mathbb{E}[Y_{T^\star}] = J_N$ et donc que $T^\star$ est un t.a. optimal pour Y. Le gain optimal est donné par $J_N = \mathbb{E}[Z_1]$. On va montrer que Z est l'enveloppe de Snell de Y: en effet soit Q un autre sur-martingale qui domine Y: au temps final on a $Q_N \geqslant Y_N = Z_N$. De plus si on a $Q_n \geqslant Z_n$ pour tout $N \geqslant n > k$ alors $Q_k \geqslant \mathbb{E}[Q_{k+1}|\mathcal{F}_k] \geqslant \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]$ et $Q_k \geqslant Y_k$, donc on a aussi $Q_k \geqslant Z_k$ et on a établi la domination aussi a l'instant k. Par induction (rétrograde) on a domination à tout temps $1 \leqslant k \leqslant N$ et donc Z est effectivement la plus petite des sur-martingales qui dominent Y. On peut conclure que le gain optimal est donné par l'espérance en 1 de l'enveloppe de Snell de Y. □

Corollaire 6. *Le t.a. $T^\star$ est le plus petit t.a. optimal: si S est un autre t.a. optimal alors $T^\star \leqslant S$ presque sûrement.*

Démonstration. Supposons que $\mathbb{P}(T^\star > S) > 0$. Alors pour $\omega \in \Omega$ tel que $T^\star(\omega) > S(\omega)$ on a que $Y_S(\omega) < Z_S(\omega)$ car $T^\star(\omega)$ est le premier k ou on a l'égalité $Y_k(\omega) = Z_k(\omega)$. Comme l'événement $\{T^\star > S\}$ a une probabilité positive on obtient que $\mathbb{E}[Y_S] < \mathbb{E}[Z_S]$ strictement. Mais par la propriété de sur-martingale de Z on en déduit que $\mathbb{E}[Y_S] < \mathbb{E}[Z_S] \leqslant \mathbb{E}[Z_1] = J_N$ et cela est en contradiction avec l'hypothèse que S est optimal (i.e. $\mathbb{E}[Y_S] = \sup_T \mathbb{E}[Y_T] = J_N$). □

Remarque 7. Si F est une v.a. positive ($\geqslant 0$) et l'événement $\{F > 0\}$ a probabilité strictement positive, alors $\mathbb{E}[F] > 0$. En effet si $\mathbb{P}(F > 0) > 0$ alors $\mathbb{P}(F \geqslant \varepsilon) > 0$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (pourquoi?). Et donc $\mathbb{E}[F] \geqslant \mathbb{E}[F\,\mathbb{I}_{F\geqslant\varepsilon}] \geqslant \mathbb{E}[\varepsilon\,\mathbb{I}_{F\geqslant\varepsilon}] \geqslant \varepsilon\,\mathbb{P}(F \geqslant \varepsilon) > 0$.

Remarque 8. On observe qu'une définition équivalente de $T^\star$ est

$$T^\star = \inf\{k \leqslant N: Y_k \geqslant \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}$$

Corollaire 9. *Le temps d'arrêt $T^\sharp = \inf\{k \leqslant N: Y_k > \mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k]\}$ est le plus grand temps d'arrêt optimal: si S est un t.a. optimal alors $S \leqslant T^\sharp$ p.s..*

Démonstration. Supposons que $\mathbb{P}(T^\sharp < S) > 0$. On remarque que $\tilde{Z}_n = Z_{n\wedge(T^\sharp+1)}$ est une martingale (en effet si $n \leqslant T^\sharp$ alors $Y_n \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ et donc $Z_n = \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$). D'une part on a que $\mathbb{E}[\tilde{Z}_S|\mathcal{F}_S] = \tilde{Z}_S$ par la martingalité de $\tilde{Z}$. On remarque aussi que $\{T^\sharp \geqslant S\} \in \mathcal{F}_S$ et donc que

$$Y_S\,\mathbb{I}_{T^\sharp\geqslant S} \leqslant Z_S\,\mathbb{I}_{T^\sharp\geqslant S} = \tilde{Z}_S\,\mathbb{I}_{T^\sharp\geqslant S} = \mathbb{E}[\tilde{Z}_{T^\sharp}\,\mathbb{I}_{T^\sharp\geqslant S}|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[Z_{T^\sharp}\,\mathbb{I}_{T^\sharp\geqslant S}|\mathcal{F}_S]. \tag{3}$$

D'autre part, si on pose $Z_{N+1} = Z_N$ alors $(Z_n)_{n=1,\ldots,N+1}$ est encore une sur-martingale et donc on a que $\mathbb{E}[Z_{S\vee(T^\sharp+1)}|\mathcal{F}_{T^\sharp+1}] \leqslant Z_{T^\sharp+1}$ (inégalité de sur-martingale avec les deux t.a. $T^\sharp + 1 \leqslant S \vee (T^\sharp + 1) \leqslant N + 1$). Pour le fait que $\{T^\sharp < S\} \in \mathcal{F}_{T^\sharp}$ et que $Y_S \leqslant Z_S$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_S\,\mathbb{I}_{T^\sharp<S}] &\leqslant \mathbb{E}[Z_S\,\mathbb{I}_{T^\sharp<S}] = \mathbb{E}[Z_{S\vee(T^\sharp+1)}\,\mathbb{I}_{T^\sharp<S}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{S\vee(T^\sharp+1)}|\mathcal{F}_{T^\sharp+1}]\,\mathbb{I}_{T^\sharp<S}] \\ &\leqslant \mathbb{E}[Z_{T^\sharp+1}\,\mathbb{I}_{T^\sharp<S}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{T^\sharp+1}\,|\mathcal{F}_{T^\sharp}]\,\mathbb{I}_{T^\sharp<S}] < \mathbb{E}[Y_{T^\sharp}\,\mathbb{I}_{T^\sharp<S}] \leqslant \mathbb{E}[Z_{T^\sharp}\,\mathbb{I}_{T^\sharp<S}]\end{aligned} \tag{4}$$

où on a utilisé aussi le fait que par la définition de $T^\sharp$ on a $Y_{T^\sharp} > \mathbb{E}[Z_{T^\sharp+1}|\mathcal{F}_{T^\sharp}]$. L'eq. (3) et l'eq. (4) donnent que

$$\mathbb{E}[Y_S] = \mathbb{E}[Y_S \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S}] + \mathbb{E}[Y_S \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] < \mathbb{E}[Z_{T^\sharp} \mathbb{I}_{T^\sharp \geqslant S}] + \mathbb{E}[Z_{T^\sharp} \mathbb{I}_{T^\sharp < S}] = \mathbb{E}[Z_{T^\sharp}] = \mathbb{E}[Y_{T^\sharp}]$$

qui est en contradiction avec l'hypothèse d'optimalité de S. □

Remarque 10. Il sera utile de donner une preuve détaillé du fait que $Y_{T^\sharp} > \mathbb{E}[Z_{T^\sharp+1}|\mathcal{F}_{T^\sharp}]$. Commencer par montrer que si F est une v.a. intégrable et T est un t.a. alors $\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_T]\mathbb{I}_{T=n} = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n]\mathbb{I}_{T=n} = \mathbb{E}[F\,\mathbb{I}_{T=n}|\mathcal{F}_n]$. De suite écrire $Y_{T^\sharp} = \sum_{n=1}^N Y_n \mathbb{I}_{T^\sharp=n}$ et conclure.

2.1 Problèmes avec structure markovienne

Dans cette section on considère des problèmes d'arrêt optimal (horizon fini) pour lesquels le processus des gains Y est une fonction connue d'une chaîne de Markov X pour la filtration $\mathcal{F}$. On montre que pour cette classe de problèmes la fonction valeur Z a une forme simple.

Un processus de Markov X pour la filtration $\mathcal{F}$ et à valeurs dans l'espace dénombrable $\mathcal{S}$ est un processus adapté $(X_n)_{n=1,2,\ldots}$ tel que $X_n: \Omega \to \mathcal{S}$ et que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x|\mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x|X_n) = P_n(X_n, x) \qquad \forall x \in \mathcal{S}, n \geqslant 1$$

où P_n est le noyau de transition du processus de Markov au temps n $P_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x)$ qui vérifie $\sum_{y\in\mathcal{S}} P_n(x, y) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \geqslant 1$. Si $P_n(x, y) = P(x, y)$ indépendamment de n on dit que le processus de Markov est homogène. P_n est aussi appelé matrice de transition.

Exemple 11. Dans le problème de la princesse la suite $(X_n)_{n=1,\ldots,N}$ est un processus de Markov avec espace d'états $\mathcal{S} = \{1, \ldots, N\}$ et noyau de transition donné par

$$P_n(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y) = \frac{1}{n+1}\mathbb{I}_{1 \leqslant y \leqslant n+1}$$

par indépendance des X_n. On remarque que ce n'est par un processus homogène en temps.

Exemple 12. Dans le problème de Moser si on fait l'hypothèse que la loi des X_n est à valeurs dans l'espace dénombrable $\mathcal{S}$ on a que les X_n constituent un processus de Markov avec matrice de transition homogène $P(x, y) = \pi(y)$ où $\pi(y) = \mathbb{P}(X_1 = y)$.

Soit X un processus de Markov pour la filtration $\mathcal{F}$ et le processus des gains soit de la forme $Y_n = \varphi_n(X_n)$ pour une famille de fonctions $\{\varphi_n: \mathcal{S} \to \mathbb{R}: n = 1, \ldots, N\}$. Considérons le problème d'arrêt optimal associé. Par induction on montre que $Z_n \in \sigma(X_n)$ i.e. qu'il existent des fonctions $V_n: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ telles que $Z_n = V_n(X_n)$. En effet $Z_N = Y_N = \varphi_N(X_N) \in \sigma(X_N)$ donc on peut prendre $V_N(x) = \varphi_N(x)$. Si on suppose que $Z_{n+1} = V_{n+1}(X_{n+1}) \in \sigma(X_{n+1})$ alors on a que $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|X_n]$ par la propriété de Markov et donc que $Z_n = \sup(Y_n, \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = \sup(\varphi_n(X_n), \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|X_n]) = V_n(X_n)$ pour une fonction V_n. Cela conclut l'argument d'induction.

En utilisant la matrice de transition on peut écrire que

$$\mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})|X_n] = \sum_{y\in\mathcal{S}} V_{n+1}(y) P_n(X_n, y) = P_n V_{n+1}(X_n)$$

où on a utilisé la notation $P\psi(x) = \sum_{y\in\mathcal{S}} P(x, y)\psi(y)$.

Les fonctions V_n sont données par l'itération suivante:

$$V_N(x) = \varphi_N(x) \qquad \text{et} \qquad V_n(x) = \sup(\varphi_n(x), P_n V_{n+1}(x)) \text{ pour } 1 \leqslant n < N.$$

La règle d'arrêt $T^\star$ devient $T^\star = \inf\{n \leqslant N: \varphi_n(X_n) = V_n(X_n)\} = \inf\{n \leqslant N: \varphi_n(X_n) \geqslant P_n V_{n+1}(X_n)\}$. Donc si on défini les ensembles $\mathcal{D}_n = \{x \in \mathcal{S}: \varphi_n(x) = V_n(x)\} = \{x \in \mathcal{S}: \varphi_n(x) \geqslant P_n V_{n+1}(x)\}$ on a que $T^\star = \inf\{n \leqslant N: X_n \in \mathcal{D}_n\}$: le premier temps où X_n entre dans le domaine $\mathcal{D}_n$ (qui change lui aussi avec le temps).

Supposons que la suite X soit donnée par des v.a. indépendantes. Dans ce cas la matrice de transition est $P_n(x, y) = \pi_n(y)$ où $\pi_n(y) = \mathbb{P}(X_n = y)$ est la loi de X_n. On voit que $P_n\psi(x)$ ne dépend pas de x et $P_n\psi(x) = \sum_{y\in\mathcal{S}} \psi(y)\pi_n(y) = \mathbb{E}[\psi(X_n)]$. La fonction valeur est $V_n(x) = \sup(\varphi_n(x), \mathbb{E}[V_{n+1}(X_{n+1})])$. Si on note $c_n = \mathbb{E}[V_n(X_n)]$ alors

$$c_N = \mathbb{E}[\varphi_N(X_N)], \qquad c_n = \mathbb{E}[\sup(\varphi_n(X_n), c_{n+1})]$$

et $T^\star = \inf\{n \leqslant N : \varphi_n(X_n) > c_{n+1}\}$. Le problème de la détermination de la fonction valeur est donc ramené au calcul des constantes c_n qui dépendent seulement des φ_n et des lois des X_n. Le gain moyen optimal est donné par $c_1 = \mathbb{E}[Z_1]$.

2.2 Problèmes monotones

Définition 13. *On défini la règle d'anticipation à une étape (1-step lookahead rule ou 1-sla) pour le problème avec horizon N en étant donnée par le temps d'arrêt*

$$T_{1\text{sla}} = \inf_N \{n < N : Y_n \geqslant \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}.$$

Autrement dit la règle 1-sla demande de s'arrêter à n si n est le premier temps où le gain Y_n est supérieur ou égale au gain moyen qu'on peut réaliser en s'arrêtant à la prochaine étape. On s'arrête à N si $Y_n < \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n \in [1, N-1]$.

Lemme 14. *On a que $T_{1\text{sla}} \leqslant T^\star$ et donc par le Corollaire 6 que $T_{1\text{sla}} \leqslant \hat{T}$ pour tout t.a. optimal $\hat{T}$.*

Démonstration. Pour tout $n < N$ on a que $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Alors $Y_n < \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leqslant \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n < T_{1\text{sla}}$ ce que implique que $T_{1\text{sla}} \leqslant T^\star$. □

Le lemme dit que si la règle 1-sla demande de continuer alors il est optimale de le faire (car n'importe quelle règle d'arrêt optimale demande aussi de continuer).

Définition 15. *Le problème d'arrêt est dit monotone ssi $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_{N-1}$ presque sûrement où A_k est l'événement $A_n = \{Y_n \geqslant \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\} \in \mathcal{F}_n$.*

Théorème 16. *La règle 1-sla est optimale pour tout problème monotone d'horizon fini.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $T_{1\text{sla}} = T^\star$. On sait déjà que $T_{1\text{sla}} \leqslant T^\star$. Pour conclure il nous reste à établir que $T_{1\text{sla}} \geqslant T^\star$ p.s.. Sur l'événement $\{T_{1\text{sla}} = k\}$ on a que A_k est vérifie. En conséquence, pour la monotonie du problème, on a que tout A_n pour $k \leqslant n \leqslant N-1$ sont vérifies. Mais cela entraîne que

$$A_{N-1} \Longrightarrow Y_{N-1} \geqslant \mathbb{E}[Y_N|\mathcal{F}_{N-1}] = \mathbb{E}[Z_N|\mathcal{F}_{N-1}] \Longrightarrow Z_{N-1} = Y_{N-1}$$

par A_{N-2} on a que $Y_{N-2} \geqslant \mathbb{E}[Y_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2}] = \mathbb{E}[Z_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2}] \Rightarrow Z_{N-2} = Y_{N-2}$ et aussi de suite jusqu'au prouver que $Y_k = Z_k$ et donc que $T^\star \leqslant k = T_{1\text{sla}}$ car $T^\star$ est le premier temps n où l'égalité $Y_n = Z_n$ est vérifié. Donc on a montré que nécessairement $T^\star \leqslant T_{1\text{sla}}$ et donc que $T^\star = T_{1\text{sla}}$. □