Examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independants. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathcal{M}=\{1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition

$$P=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les classes de communication et classifier les états en transients ou récurrents.

b) La chaîne est-elle irréductible?

c) Calculer $\mathbb{P}(X_2=1|X_0=5)$ et $\mathbb{P}(X_n=4|X_0=3)$ pour tout $n\geqslant 1$.

d) Soit $T_x=\inf\{n>0: X_n=x\}$. Calculer $\mathbb{P}(T_2<T_4|X_0=3)$.

e) Déterminer les probabilités invariantes de la chaîne.

f) Soit $u(x)=\mathbb{P}_x(T_1<+\infty)$ pour tout $x\in\mathcal{M}$. Déterminer l'équation linéaire satisfaite par u.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène sur l'espace d'états $\mathcal{M}$ et de matrice de transition P. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration engendrée par les $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et

$$T=\inf\{n\geqslant 1: X_n\neq X_0\}.$$

a) Montrer que T est un temps d'arrêt.

b) Calculer $\mathbb{P}_x(T=k)$ pour tout $k\geqslant 1$ et montrer que si $P(x,x)<1$ alors $\mathbb{P}_x(T=+\infty)=0$.

c) En supposant que $P(x,x)<1$ calculer $\mathbb{P}_x(X_T=y)$ pour tout $x,y\in\mathcal{M}$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène sur l'espace d'états $\mathcal{M}$ avec matrice de transition P. Soit $f\colon\mathcal{M}\to[0,+\infty]$ une fonction positive telle que

$$f(x)\geqslant \sum_{y\in\mathcal{M}} P(x,y)f(y)=Pf(x)$$

pour tout $x\in\mathcal{M}$. On défini le processus $(M_n)_{n\geqslant 0}$ par $M_n=f(X_n)$.

a) Montrer que M_n est une sur-martingale par rapport à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer que M_n converge p.s.

c) En supposant que la chaîne est irréductible et récurrente, montrer que f est une fonction constante.

Exercice 4. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de loi uniforme sur $[0,\ 1]$ et X_0 une v.a. uniforme sur $[0,1]$ et indépendante des $(U_n)_{n\geqslant 1}$. Soit $0<\alpha<1$ et

$$X_{n+1}=\alpha\, X_n+(1-\alpha)\,\mathbb{I}_{U_{n+1}\leqslant X_n} \qquad \text{pour } n\geqslant 1.$$

a) Soit $\mathcal{F}_n=\sigma(X_0,\ldots,X_n)$ pour $n\geqslant 0$. Calculer $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ pour tout $n\geqslant 0$.

b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. vers un limite qu'on appelle X_∞.

c) Montrer que $X_\infty=\lim_n X_n\in\{0,1\}$ p.s.

d) Montrer par récurrence que $X_n\leqslant 1$ p.s.

e) Montrer que X_n converge vers X_∞ dans L^1.

f) En déduire que $\mathbb{P}(X_\infty=0)=\mathbb{P}(X_\infty=1)=1/2$.