Rattrapage

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independantes. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[X_i]=0$, $\mathbb{E}[X_i^2]=1$ et $\mathbb{E}[X_i^4]<\infty$ pour tout $i\geqslant 1$. On appelle $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ la filtration naturelle des $(X_n)_{n\geqslant 1}$, c-à-d $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\ldots,X_n)$ pour $n\geqslant 1$. Soit $(a_{i,j})_{i,j\geqslant 1}$ une suite à deux indices de nombres réels, vérifiant la condition de symétrie $a_{i,j}=a_{j,i}$ pour tous $i,j\geqslant 1$. On suppose aussi que $C=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}^2<+\infty$. On considère les processus $(Q_n)_{n\geqslant 1}$, $(U_n)_{n\geqslant 1}$, $(V_n)_{n\geqslant 1}$ définis par

$$Q_n=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}X_iX_j,\qquad V_n=\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,i}(X_i^2-1)\qquad \text{pour}\, n\geqslant 1;$$

$$\text{et}\qquad U_1=0,\quad U_n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}X_iX_j=\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}X_j\right)X_i\qquad \text{pour}\, n\geqslant 2.$$

a) Pour $n\geqslant 1$ on pose $A_n=\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,i}$, $M_n=Q_n-A_n$. Montrer que $M_n=2U_n+V_n$ et que les processus $(U_n)_{n\geqslant 1}$, $(V_n)_{n\geqslant 1}$ et $(M_n)_{n\geqslant 1}$ sont des martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.

b) Montrer que $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ sont des processus bornés dans $L^2(\Omega)$.

c) En déduire que le processus $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers une v.a. finie M_∞.

d) Expliquer pourquoi $\mathbb{E}[M_\infty]=0$ et $\mathrm{Var}(M_\infty)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(M_n)$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ deux chaînes de Markov homogènes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On suppose qu'elle sont indépendantes, qu'elles ont le même espace d'état $\mathcal{M}=\{0,1\}$ et la même matrice de transition $P:\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to[0,1]$ donnée par

$$P=\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha\\ \alpha & 1-\alpha\end{pmatrix}$$

où $\alpha\in]0,1[$ est un paramètre. Pour $n\geqslant 0$ on pose $Z_n=(X_n,Y_n)$ et $W_n=\mathbb{I}_{X_n=Y_n}$.

a) Montrer que le processus $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène et déterminer son espace d'états et sa matrice de transition.

b) Soit $T=\inf\{n\geqslant 0: X_n=Y_n\}$ le premier instant où les deux chaînes se trouvent dans le même état. En exploitant le fait que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène et en supposant que $\mathbb{P}(X_0\neq Y_0)=1$, déterminer la loi de T.

Exercice 3. Un joueur joue à pile ou face de manière répétée : il mise 1€ à chaque parte, et remporte sa mise ou la perd selon le résultat. On suppose qu'il part avec moins de 10€ et qu'il joue tant qu'il n'est pas ruiné ou qu'il n'a pas atteint la somme de 10€. Pour $n\geqslant 0$ soit X_n la somme qu'il possède après l'n-iéme jeu.

a) Montrer que le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\{0,\ldots,10\}$ et donner sa matrice de transition.

b) On pose $T_x = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n = x\}$ et $u(x) = \mathbb{P}(T_{10} < T_0 | X_0 = x)$. Donner une interprétation intuitive de cette probabilité.

c) Déterminer l'équation linéaire satisfaite par la fonction $u(x)$, ainsi que les conditions aux limites.

d) On suppose que le joueur commence avec 1€. Déterminer la probabilité qu'il atteigne la somme de 10€.