TD2. Martingales, strategies et arrêt optionnel.

Exercice 1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ une filtration.

a) Soient S, T des temps d'arrêt, montrer que $T\wedge S$ et $T\vee S$ sont des temps d'arrêt.

b) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté et B un Borélien, montrer que le temps d'atteinte de B

$$T=\inf\{n\geqslant 0: X_n\in B\}$$

est un temps d'arrêt.

Exercice 2. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_i=1)=p=1-P\,(Y_i=-1)$. Soit $S_n=\sum_{i=1}^n Y_i$ (et $S_0=0$). Montrer que les processus $(W_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n)_{n\geqslant 0}$ définis par

$$W_n=S_n-(2\,p-1)\,n,$$

et

$$M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n},$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle des Y_n: $\mathcal{F}_n=\sigma(Y_1,\ldots,Y_n)$ pour $n\geqslant 1$ et $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$.

Exercice 3. Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ deux sur-martingales et T un temps d'arrêt tels que $T<+\infty$ implique $X_T\geqslant Y_T$. Montrer que le processus $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ défini par

$$Z_n=X_n\,\mathbb{I}_{T>n}+Y_n\,\mathbb{I}_{T\leqslant n}$$

est une sur-martingale.

Exercice 4. Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, telle que $\mathbb{E}(M_n^2)<+\infty$ pour tout $n\geqslant 0$. Soit

$$A_n=\sum_{i=1}^n \mathbb{E}([\Delta\,M_i]^2|\mathcal{F}_{i-1}) \tag{1}$$

Montrer que $M_n^2-A_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale ($\Delta\,M_i=M_i-M_{i-1}$).

Exercice 5. Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et tel que $M_n\in L^1$ pour tout $n\geqslant 0$. Montrer que les propriété suivantes sont équivalentes:

a) $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

b) $\mathbb{E}[M_T]=\mathbb{E}[M_0]$ pour tout temps d'arrêt borné T.

Indication pour *b)* $\Rightarrow$ *a)*: commencer par montrer que pour tous $n\geqslant 0$ et $A\in\mathcal{F}_n$ la variable $T_{n,A}=(n+1)\,\mathbb{I}_A+n\,\mathbb{I}_{A^c}$ est un temps d'arrêt.

Exercice 6. Soit G une v.a. géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$ (c-à-d $\mathbb{P}(G=k)=p^k\,(1-p)$, $k\in\mathbb{N}$). Soit pour tout $n\geqslant 0$, $\mathcal{F}_n=\sigma\,(G\wedge(n+1))$.

a) Montrer que $\mathcal{F}_n=\sigma(\{\{G=0\},\{G=1\},\ldots,\{G=n\},\{G>n\}\})$.

b) Montrer que $M_n = \mathbb{I}_{G \leqslant n} - (1-p)\,(G \wedge n)$ et $Y_n = M_n^2 - p\,(1-p)\,(G \wedge n)$, $n \geqslant 0$ sont deux martingales pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = 1/2$. Dans la suite on considère la filtration naturelle des X_i comme filtration de référence. On pose

$$Y_0 = 0, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} X_k \qquad n \geqslant 1.$$

C'est le gain dans un jeu de pile ou face où l'on double la mise à chaque coup. On souhaite s'arrêter dès qu'on gagne pour la première fois. On pose donc

$$T = \inf\{n \geq 1 \colon X_n = 1\}.$$

a) Montrer que $(Y_{n \wedge T})_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, en déduire la valeur de $\mathbb{E}[Y_{n \wedge T}]$ pour tout $n \geqslant 0$.

b) Montrer $T < +\infty$ p.s. et montrer que $Y_T = 1$ p.s. Commenter.

c) Soit $D = |G_{T-1}|$. Montrer que $\mathbb{E}[D] = +\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 8. (LA RUINE DU JOUEUR) Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. avec $\mathbb{P}\,(X_n = +1) = p \in]0,1[$, $\mathbb{P}\,(X_n = -1) = q = 1 - p$ et $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ la filtration naturelle des X. On fixe un entier $N \geq 2$. Soit $x \in \{0, 1, \ldots, N\}$, on pose $S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geqslant 1$ et $T = \inf\{n \geqslant 0 \colon S_n = 0 \,\mathrm{ou} S_n = N\}$.

a) Montrer que T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$.

b) Soit $n \geqslant 0$, montrer que si $n < T$ et $X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = X_{n+N-1} = 1$, alors $T < n + N$.

c) En déduire que $\mathbb{P}\,(n + N - 1 < T) \leq (1 - p^{N-1})\,\mathbb{P}(n < T)$, puis que $T < +\infty$ p.s.

d) On suppose dans les deux questions suivantes que $p = q = 1/2$. Montrer que $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale.

e) En appliquant le théorème d'arrêt, déterminer $\mathbb{P}(S_T = 0)$.

f) On suppose désormais $p \neq q$. On pose $M_n = (q/p)^{S_n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale.

g) Déterminer $\mathbb{P}(S_T = 0)$.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. telle que X_n est une v.a. choisie uniformément dans l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, \ldots, Z\}$ ($\#\mathcal{A} = 26$). Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 1}$ la filtration naturelle des X ($\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). On considère la suite comme une chaîne de symboles. Soit T_{AB} le premier instant où on voit apparaitre la chaîne "AB" dans la suite $X_1\, X_2 \cdots X_n \cdots$ (formellement $T_{\mathrm{AB}} = \inf\{n \geqslant 2 \colon X_n = B, X_{n-1} = A\}$). On veut calculer le temps moyen $\mathbb{E}[T_{\mathrm{AB}}]$ d'apparition du mot "AB".

a) Soit $Y_n = \sum_{k=2}^{n} 26^2\, \mathbb{I}_{X_k = B, X_{k-1} = A} + 26\, \mathbb{I}_{X_n = A}$. Montrer que $M_n = Y_n - n$ est une martingale.

b) Montrer qu'il existe une constante $0 < c < 1$ telle que $\mathbb{P}(T_{\mathrm{AB}} > n) \leqslant c^n$. En déduire que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{AB}}] < +\infty$ et $\mathbb{P}\,(T_{\mathrm{AB}} < +\infty) = 1$.

c) Montrer que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{AB}}] = \mathbb{E}[Y_{T_{\mathrm{AB}}}] = 26^2$.

d) Soit $T_{\mathrm{BB}} = \inf\{n \geqslant 2 \colon X_n = B, X_{n-1} = B\}$. Montrer que $\mathbb{E}[T_{BB}] = 26^2 + 26$.

e) Soit $T_{\mathrm{ABRACADABRA}}$ le premier instant où on voit apparaitre la chaîne "ABRACADABRA". Montrer que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{ABRACADABRA}}] = 26^{11} + 26^4 + 26$.