TD4. Chaînes de Markov.

Exercice 1. On lance un dé de manière répétitive. Parmi les suites aléatoires suivantes, lesquelles sont des chaînes de Markov ? Donner leur matrice de transition.

a) X_n : le plus grand résultat obtenu après n lancers.

b) N_n : le nombre de 6 obtenus au bout de n lancers.

c) C_n : nombre de lancers, à l'instant n, depuis le dernier 6.

d) $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$.

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ homogène de matrice de transition P. Déterminer si les processus suivantes sont des chaînes de Markov et éventuellement préciser leur matrice de transition:

a) $W_n = X_{n+k}$, $n\geqslant 0$ où $k\in\mathbb{N}$ est fixé ;

b) $Y_n = X_{2n}$, $n\geqslant 0$;

c) $Z_n = X_{T_n}$, $n\geqslant 0$ où $T_n = S_1 + \cdots + S_n$, $T_0 = 0$ et la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est iid et à valeurs dans $\mathbb{N}+1$.

Exercice 3. (Pannes aléatoires) Soit $\{U_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite iid à valeurs dans $\{1, 2, ..., +\infty\}$. La v.a. U_k s'interprète comme durée de vie d'une quelque machine (la k-eme) qui est remplace par un autre (la $k+1$-eme) des qu'elle défaille. Au temps initial 0 la machine 1 est mise en service et elle dure jusq'au temps U_1, subitement remplacée par la machine 2 que dure pour un intervalle de temps U_2 et donc jusq'au temps U_1+U_2 et ainsi de suite. On note X_n le temps de service de la machine en utilisation au temps n. Le processus $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(U_1 > x+1)}{\mathbb{P}(U_1 > x)} & \text{si } y = x+1 \text{ ;} \\ 1 - P(x, x+1) & \text{si } y = 0 \text{ ;} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \qquad \forall x, y \in \mathbb{N}$$

Exercice 4. (L'urne d'Ehrenfest) Dans un récipient divisé en deux enceintes par une paroi poreuse sont réparties N molécules de gaz. A chaque unité de temps une particule choisi au hasard change d'enceinte. (les particules sont choisie avec loi uniforme sur $\{0, N\}$ et indépendamment à chaque instant de temps)

1. *Vision Microscopique*: L'état du système X_n à l'instant n est représenté par un vecteur $(x^i) \in M = \{0, 1\}^N$ où la i^e composante x^i vaut 1 ou 0 selon que la i-eme particule est dans la première ou la seconde enceinte.

   a. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur M et donner sa matrice de transition.

   b. Écrire $(X_n)_{n\geqslant 0}$ comme récurrence aléatoire.

   c. Montrer que pour tout $x, y\in M$ il existe $n\geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0$.

2. *Vision macroscopique*: Soit S_n ne nombre de particules dans la première enceinte au temps n: $S_n = \sum_{k=1}^{N} X_n^k$.

   a. Montrer que S_n est une chaîne de Markov sur $\{0, N\}$ et donner sa matrice de transition.

   b. Écrire $(S_n)_{n \geqslant 0}$ comme récurrence aléatoire.

   c. Montrer que pour tout $x, y \in \{0, N\}$ il existe $n \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(S_n = y | S_0 = x) > 0$.

Exercice 5. (Ruine du joueur) Deux joueurs A et B misent de façon répété 1 euro et chaque fois la probabilité que A gagne est $p \in]0, 1[$. Les jeux successifs sont indépendantes. Soit X_n la fortune du joueur A après n parties et soit a la fortune initiale de A et b celle de B. Le jeux termine de que un des joueurs perd tout sa fortune. On stipule que si un des joueurs perd sa fortune à l'instant n alors $X_k = X_n$ pour tout $k \geqslant n$. Donc $X_0 = a$ et le jeux termine de que $X_n \in \{0, a + b\}$. Soit $T = \inf \{n \geqslant 0 \colon X_n = 0 \,\text{ou}\, X_n = a + b\}$ la durée (aléatoire) du jeux. La probabilité que A gagne si sa fortune initiale est x on la note $u(x) = \mathbb{P}(X_T = a + b, T < +\infty | X_0 = x)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer son espace d'états M et sa matrice de transition P.

2. Montrer que $u(0) = 0$, $u(a + b) = 1$ et

$$u(x) = p u(x + 1) + (1 - p)\, u(x - 1), \qquad a < x < b.$$

3. Déterminer $u(x)$ et $v(x) = \mathbb{P}(X_T = 0, T < +\infty | X_0 = x)$ et conclure que $\mathbb{P}(T = +\infty | X_0 = x) = 1$ pour tout $x \in M$.

4. Remarquer que dans le cas $b = +\infty$ (joueur contre casino) et $p = q$ (jeux équitable) on a que $v(x) = 1$ et donc que un joueur perdra toujours...

5. Soit $m(x) = \mathbb{E}[T | X_0 = x]$ la durée moyenne du jeux si la fortune initiale de A est x. Montrer que $m(x)$ satisfait la récurrence:

$$m(x) = 1 + p\, m(x + 1) + (1 - p)\, m(x - 1)$$

   pour tout $x \in]0, a + b[$ avec conditions au bords $m(0) = 0$ et $m(a + b) = 0$.

6. Montrer que l'unique solution de cette récurrence est

$$m(x) = x\,(a + b - x)\,.$$

7. Conclure que dans le cas $b = +\infty$ en moyenne il faut un temps infini pour être ruiné en jouant contre le banc.