[M. Gubinelli - Processus discrets - M1 MMD 2011/2012 - 20111103 - poly 3 - v.1]

3 Comportement asymptotique des martingales

1 Convergence presque sure

On rappelle que une sur-martingale $(X_n)_{n\geqslant 1}$ peut être considérée comme le gain dans un jeu défavorable, au sens où ΔX_n est notre gain (pour une mise de 1) dans l'n-éme partie, le caractère défavorable du jeux viens du fait que $\mathbb{E}[\Delta X_n|\mathcal{F}_{n-1}]\leqslant 0$: en moyenne on perd.

Fixons $a<b$ deux réels quelconque et considérons la stratégie de jeu suivante: on commence par attendre le premier instant S_1 où $X_{S_1}<a$, à ce moment on commence à jouer jusqu'au premier instant $T_1>S_1$ où $X_{T_1}>b$. A ce moment on a gagné la quantité $X_{T_1}-X_{S_1}>b-a$ et on s'arrête de jouer jusqu'à $S_2>T_1$ ou X_{S_2} redevient $<a$ et on recommence. Si l'on fixe un horizon temporel $n<\infty$ et l'on note $U_n(a,b)$ le nombre de fois que $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ passe de $]-\infty,a[$ à $]b,+\infty[$ et W_n notre gain en utilisant la stratégie décrite on a que

$$W_n-W_0\geqslant(b-a)U_n(a,b)-(X_n-a)_- \tag{1}$$

Le terme $(X_n-a)_-$ corresponds à ce que on a eventuellement perdu dans la derniére montée avant d'atteindre b. Il est aussi facile voir que $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est une sur-martingale car on peut écrire

$$W_n=W_0+\sum_{k=1}^n H_n\,\Delta X_n$$

avec $H_n=\sum_{i=1}^\infty \mathbb{I}_{S_i\leqslant n\leqslant T_i-1}=\mathbb{I}_{\{n\in\cup_{i\geqslant 1}[S_i,T_i-1]\}}$. De façon équivalente on peut définir $(H_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence: $H_1=0$,

$$H_{n+1}=\mathbb{I}_{H_n=0,X_n<a}+\mathbb{I}_{H_n=1,X_n>b}\,.$$

Alors $U_n(a,b)=\sum_{i=2}^n \mathbb{I}_{H_n=0,H_{n-1}=1}$.

Exercice 1. Montrer que $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est un processus prévisible.

Pour montrer que l'équation (1) est satisfaite pour tout n on définit $T_n=\sup(0\leqslant k\leqslant n: H_k=0)$. C'est le dernier instant avant n où on recommence la stratégie d'achat. Ce n'est pas un temps d'arrêt. À ce moment, $X_{T_n}<a$, $U_n(a,b)=U_{T_n}(a,b)$ et $W_n-W_{T_n}=X_n-X_{T_n}$ car $H_k=1$ pour tout $T_n\leqslant k\leqslant n$. Or $W_{T_n}-W_0\geqslant(b-a)U_{T_n}(a,b)$ car chaque traversée montante il nous fait gagner au moins $(b-a)$. Alors

$$\begin{aligned}W_n-W_0=&W_{T_n}-W_0+X_n-X_{T_n}\geqslant(b-a)U_{T_n}(a,b)+X_n-a\\=&(b-a)U_n(a,b)+(X_n-a)_+-(X_n-a)_-\\\geqslant&(b-a)U_n(a,b)-(X_n-a)_-\,.\end{aligned}$$

Du fait que $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est prévisible et que $0\leqslant H_n$ on obtient que $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est une sur-martingale :

$$0\geqslant\mathbb{E}[W_n-W_0]\geqslant\mathbb{E}[U_n(a,b)](b-a)-\mathbb{E}[(X_n-a)_-]$$

(dans un jeu défavorable, tout stratégie ne peut qu'apporter des pertes en moyenne). On en déduit donc le lemme suivante (car $\mathbb{E}[(X_n-a)_-]\leqslant\mathbb{E}[(X_n-a)_-]+\mathbb{E}[(X_n-a)_+]=\mathbb{E}[|X_n-a|]$)

Lemme 1. *(*DOOB*) Pour tout $a<b$ et $n\geqslant 1$ on a que*

$$\mathbb{E}[U_n(a,b)]\leqslant\frac{\mathbb{E}[|X_n-a|]}{b-a}$$

ce qui donne une estimation du nombre de tranversées montantes de l'intervalle $[a, b]$ par le processus $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ en fonction d'une moyenne sur sa valeur terminale. Une conséquence importante pour les sur-martingales bornées dans L^1 est donnée par le corollaire suivante:

Corollaire 2. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une sur-martingale bornée dans L^1(c-à-d $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$), alors si on note $U(a, b) = \sup_{n\geqslant 1} U_n(a, b)$ le nombre de traversées de l'intervalle $[a, b]$ par $(X_n)_{n\geqslant 1}$ on a que*

$$\mathbb{P}(U(a, b) = +\infty) = 0$$

pour tout $a < b$.

Démonstration. Par l'inégalité de Doob sur le nombre des montées de $(X_n)_{n\geqslant 1}$ on a que

$$\mathbb{E}[U_n(a, b)] \leqslant \frac{a + \mathbb{E}[|X_n|]}{b - a} \leqslant \frac{a + \sup_n \mathbb{E}[|X_n|]}{b - a} < +\infty$$

pour tout $a < b$ et $n \geqslant 1$. Par convergence monotone on a

$$\mathbb{E}[U(a, b)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_n(a, b)] \leqslant \frac{a + \sup_n \mathbb{E}[|X_n|]}{b - a} < +\infty$$

et donc que $\mathbb{P}(U(a, b) = +\infty) = 0$ pour tout $a < b$. □

Tout cela montre que une sur-martingale ne peut pas osciller de façon trop irrégulière et que ça est liée au fait qu'il est impossible trouver des stratégies gagnantes sur une sur-martingale. Réciproquement un théorème analogue peut montrer que une sous-martingale bornée en L^1 n'admet pas une infinité de traversées descendantes et donc que en jouant sur une sous-martingale on ne peut pas perdre une quantité illimité d'argent.

Le théorème principale de ce chapitre est le suivante (à remarquer qu'il est formulé seulement pour les sous-martingales):

Théorème 3. *(DOOB) Une sous-martingale $(X_n)_{n\geqslant 1}$ bornée dans L^1 converge p.s. vers une v.a. $X \in L^1$.*

Démonstration. Le processus $Y_n = -X_n$ est une sur-martingale bornée dans L^1. Soient $L_+ = \operatorname{limsup}_n Y_n$ et $L_- = \operatorname{liminf}_n Y_n$. Supposons que $\mathbb{P}(L_- < L_+) > 0$ (c-à-d Y_n ne converge pas p.s.). Par continuité de la probabilité $\mathbb{P}$ il existent $a < b$ tels que $\mathbb{P}(L_- < a < b < L_+) > 0$. Or

$$\{L_- < a < b < L_+\} \subseteq \{U(a, b) = +\infty\}$$

et on obtient donc que $\mathbb{P}(U(a, b) = +\infty) > 0$ en contradiction avec la conséquence de la bornitude en L^1 de $(Y_n)_{n\geqslant 1}$. Donc on doit avoir $\mathbb{P}(L_- < L_+) = 0$ ce que donne la convergence p.s. de $(Y_n)_n$ vers $Y = L_- = L_+$ et donc de $(X_n)_{n\geqslant 1}$ vers $X = -Y$. Or, par Fatou, $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[\operatorname{liminf}_n |X|] \leqslant \operatorname{liminf}_n \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ et donc $X \in L^1$. □

L'équivalent pour les sur-martingales est le théorème suivant.

Théorème 4. *(DOOB) Une sur-martingale $(X_n)_{n\geqslant 1}$ positive converge p.s. vers une v.a. $X \in L^1$.*

Démonstration. On a que $\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] \leqslant \mathbb{E}[X_0]$ par positivité et propriété de sur-martingale. Donc $(-X_n)_{n\geqslant 1}$ est une sous-martingale bornée dans L^1. Par le théorème précédente elle converge vers un limite $-X \in L^1$. Cela revient a dire que $X_n \to X$ p.s. et $X \in L^1$. □

Exercice 2. Montrer que si $X \geqslant 0$ est une v.a. et que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(X > \varepsilon) > 0$ (Sugg: considérer les événements $\{X \leqslant 1/n\}$ et montrer que si $\mathbb{P}(X \geqslant 1/n) = 0$ alors $\mathbb{P}(X > 0) = 0$).

Exercice 3. Montrer que $\{L_- < a < b < L_+\} \subseteq \{U(a, b) = +\infty\}$ pour tout $a < b$.

Remarque 5. Bien que la limite d'une sous-martingale bornée dans L^1 soit une v.a. dans L^1, cette convergence n'a pas a priori lieu dans L^1. Voici un contre-exemple.

Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite iid avec $\mathbb{P}(Z_n=+1)=1-\mathbb{P}(Z_n=-1)=p$. Soit $u>1$. On pose $X_0=x$ et $X_{n+1}=u^{Z_{n+1}}X_n$. Supposons que $p=1/(1+u)$ de telle sorte que $\mathbb{E}[u^{Z_{n+1}}]=1$. Alors il est facile de vérifier que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale et donc $\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[X_0]=x$. Par la loi forte des grands nombres on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k=\mathbb{E}[Z_1]=2\,p-1=\frac{1-u}{1+u}<0$$

d'où

$$\left(\frac{X_n}{x}\right)^{1/n}\to u^{2p-1}<1 \qquad p.s.$$

Ainsi $X_n\to 0$ p.s., alors que son espérance est constante! (et donc $X_n\nrightarrow 0$ dans L^1).

2 Martingales bornées dans L^2

Théorème 6. *Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale telle que $\alpha=\sup_{n\geqslant 0}\mathbb{E}[M_n^2]<+\infty$. Alors la suite M_n converge dans $L^2(\Omega)$ et p.s.*

Démonstration. On écrit la martingale comme somme de ses incréments:

$$M_n=M_0+\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k$$

et on remarque que les incréments sont orthogonaux: si $n>k$:

$$\mathbb{E}[\Delta M_n\,\Delta M_k]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta M_n\Delta M_k|\mathcal{F}_{n-1}]]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta M_n|\mathcal{F}_{n-1}]\Delta M_k]=0$$

car $\Delta M_k\hat{\in}\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{F}_{n-1}$. Donc

$$\mathbb{E}[M_n^2]=\mathbb{E}[M_0^2]+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(\Delta M_k)^2]$$

et

$$\mathbb{E}[M_0^2]+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[(\Delta M_k)^2]=\alpha$$

ce qui implique que la suite $\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k$ converge dans $L^2(\Omega)$ et donc que $M_\infty=\lim_n M_n$ dans L^2: en effet pour tout $k'\geqslant k\geqslant n$

$$\mathbb{E}[|M_{k'}-M_k|^2]=\sum_{\ell=k+1}^{k'}\mathbb{E}[(\Delta M_\ell)^2]\leqslant\sum_{\ell=n+1}^{\infty}\mathbb{E}[(\Delta M_\ell)^2]\to 0$$

quand $n\to+\infty$. La suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est donc de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme la martingale est aussi bornée dans $L^1\subseteq L^2$ alors $M_n\to X$ p.s. On veut montrer que $M_\infty=X$ p.s. De la convergence L^2 de M_n vers M_∞ on peut déduire que il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geqslant 1}$ telle que M_{n_k} converge p.s. vers M_∞. Mais alors $M_\infty=\lim_k M_{n_k}=\lim_n M_n=X$ p.s. . □